TD n°2-

Exercice 1 *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

où $g :: \mathbb{R}^2 \diagdown \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) *Si* $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^2$ *et calculer ses dérivées partielles mais qu'elle n'y est pas continue.*
2) *Si* $g(x,y) = |x| + |y|$, *montrer que* f *est continue mais pas dérivable sur* $\mathbb{R}^2$.
3) *Si* $g(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, *montrer que* f *n'est ni continue ni dérivable sur* $\mathbb{R}^2$.
4) *Si* $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, *montrer que* f *est continue et est dérivable sur* $\mathbb{R}^2$ *mais elle n'est pas différentiable sur* $\mathbb{R}^2$.
5) *Si* $g(x,y) = (xy)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ *montrer que* f *est continue, dérivable et est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *mais qu'elle n'est pas de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
6) *Que peut-on conclure ?*

Exercice 2 1) *Soient* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *et* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *deux fonction définies par* $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ *et* $g(x,y) = (x+y, xy, x-y)$. *Montrer que* $g \circ f$ *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et écrire* $J_{g\circ f}$ *la matrice jacobienne de* $g \circ f$ *en un point* (a,b) *de* $\mathbb{R}^2$.

2) *Soient* $p(x,y) = \sin(x^2-y^2)$ *et* $h(x,y) = (x+y, x-y)$.

2-1) *Calculer* $\dfrac{\partial(p\circ h)}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial(p\circ h)}{\partial y}(x,y)$ *en* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2-2) *Ecrire* $J_p h(x,y)$ *et* $J_h(x,y)$ *les matrices jacobiennes de* p *et* h *pour* (x,y) *dans* $\mathbb{R}^2$.

2-3) *Trouver la matrice jacobienne de* $(p \circ h)$ *par deux méthodes.*

Exercice 3 *Soit la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :* $g(x,y) = (x+y)^2 + 2(x-y)$.

1) *Calculer* $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ *pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) *Montrer que* g *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et écrire son différentiel au point* $(-1,1)$.
3) *Calculer* $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$; $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4) *En déduire sans calcul* $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
5) *Vérifier que* $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \alpha(x+y)$, *où* α *est un réel à déterminer.*
6) *Soit* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que*
$$F(t) = g(x(t), y(t)),$$
où $x(t) = e^{2t}$ *et* $y(t) = (1+t)^2$.
Montrer que F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $F'(t)$.

Exercice 4 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathbf{C}^2$ *par rapport à ses deux variables* x *et* y.

1) *Posons* $u = x - y$ *et* $v = x + y$, *déterminer l'expression de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *en fonction des dérivées partielles de* f *par rapport à ces deux nouvelles variables* u *et* v.
2) *Considérons maintenant les coordonnées polaires* r *et* θ *où* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$, *exprimer l'opérateur (dit opérateur de Laplace)* $\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *en fonction des dérivées partielles de* f *par rapport à* r *et* θ.

Exercice 5 *Soit la fonction :* $f(x,y) = \sqrt{3x - y}$ *définie sur* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 3x - y\}$

1) *Calculer pour tout* $(x,y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.
2) *Ecrire un D.L de* f *d'ordre 1 au voisinage du point* $(1,2)$.
3) *Ecrire un D.L de* f *d'ordre 2 au voisinage du point* $(1,2)$.
4) *Montrer en utilisant la définition que la différentielle de* f *existe au point* $(2,2)$.
5) *Ecrire l'équation du plan tangent au point* $(2,2)$.
6) *Déduire une valeur approchée de* $f(2.01, 1.99)$ *et comparer la avec sa valeur exacte obtenue directement de l'expression de* f.

Exercice 6 *Soit* $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{1+x-y}$ *une fonction définie sur* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \neq 1 + x - y\}$

1) *En utilisant le D.L de la fonction* $1/(1+u)$, *écrire un D.L d'ordre* 2 *de* f *au voisinage de* $(0,0)$.
2) *Par identification avec la formule théorique, déduire sans calcul* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

Exercice 7 A. *Soit la fonction* g *définie par :*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3.y - y^3.x}{x^2+y^2}, & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A.1) *Montrer que* g *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
A.2) *Montrer que* g *est dérivable en* $(0,0)$ *est calculer* $\nabla g(0,0)$.
A.3) *Montrer que* g *est différentiable en* $(0,0)$.

B. *Soit la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

B.1) *Montrer que* h *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
B.2) *Calculer* $\nabla h(x,y)$ *pour* $(x,y) \neq (0,0)$.
B.3) *Montrer que* h *est dérivable en* $(0,0)$ *est calculer* $\nabla h(0,0)$.
B.4) *Montrer que* h *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et déduire sa différentiabilité sur* $\mathbb{R}^2$.

C. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :* $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x-y)^2$.

C.1) *Calculer pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ *et déduire sans calcul* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ *(en justifiant).*
C.2) *Soit* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que*

$$F(t) = f(x(t)), y(t)).$$

Où $x(t) = cos(t)$ *et* $y(t) = sin(t)$. *Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $F'(t)$.