TD n°2-

Exercice 1 *1. En utilisant la définition avec les limites, calculer les derivées partielles de la fonction f définie par $f(x,y) = xy^2$ en un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$.*

2. *Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes sur leurs domaines de définitions :*
   a) $f(x,y) = 2xe^{3y}$, *b)* $g(x,y) = xy^2 + ze^{y/z}$, *c)* $h(x_1, ...x_n) = x_1 \ln(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.
3. *Calculer la dérivée directionnelle de la fonction définie par $f(x,y) = xy^2 + x + y$ au point $(0,0)$ suivant un vecteur non nul $v = (v_1, v_2)$.*
4. *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux fonctions définies par $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ et $g(x,y) = (x+y, xy, x-y)$. Montrer que $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et écrire J_{gof} la matrice jacobienne de $g \circ f$ en un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$.*
5. *Soient $p(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $h(x,y) = (x+y, x-y)$.*
   (a) *Calculer* $\dfrac{\partial(p \circ h)}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial(p \circ h)}{\partial y}(x,y)$ *en* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) *Écrire $J_p(x,y)$ et $J_h(x,y)$ les matrices jacobiennes de p et h pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$.*
   (c) *Trouver la matrice jacobienne de $(p \circ h)$ par deux méthodes.*

Exercice 2 *1. Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (-x, 3y)$ et $g(x,y) = (3x^2, 2xy)$, calculer les dérivées partielles de $g \circ f$ et de $f \circ g$.*

2. *Soit $h(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$, posons $F(t) = h(x(t), y(t))$ où $x(t) = 2 + \cos t$ et $y(t) = \sin t$, montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(t)$ pour tout réel t.*
3. *(Passage aux coordonnées polaires) Soit :* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$
   tel que : $x(r,\theta) = r.cos\theta$ et $y(r,\theta) = r.sin\theta$, où $r \in \mathbb{R}^+$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, montrer que $g(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 3 *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

où $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) *Si* $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles mais qu'elle n'y est pas continue.*
2) *Si $g(x,y) = |x| + |y|$, montrer que f est continue mais pas dérivable sur $\mathbb{R}^2$.*
3) *Si* $g(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, *montrer que f n'est ni continue ni dérivable sur $\mathbb{R}^2$.*
4) *Si* $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, *montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ mais qu'elle n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 4 *1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{xy}, & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1.1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

1.2) Étudier la continuité des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.3) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

.

2) Montrer que la fonction h définie par

$$h(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{(x^2+y^2)}, & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

est continue, dérivable et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5 *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g(x,y) = (x+y)^2 + 2(x-y)$.*

1) Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et écrire son différentiel au point $(-1,1)$.

3) Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$F(t) = g(x(t), y(t)),$$

où $x(t) = e^{2t}$ et $y(t) = (1+t)^2$.
Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(t)$.

Exercice 6 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ est calculer $\nabla f(0,0)$.

4) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déduire sa différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 *A) Montrer que la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et écrire son différentiel en un point (x_0, y_0)*
B) Soit $f(x,y) = \sqrt[3]{x.y}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

B.1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

B.2) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.