Université de Batna –2–
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
$2^{ème}$ année Licence S.A.D

Introduction à la Topologie
Mme. S. Megri
2023-2024

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Continuité dans les espaces métriques

Exercice 1 *Soit l'application $f:(E,d)\to(F,\delta)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue.*

(ii) *$\forall F$ un fermé de F, $f^{-1}(F)$ est un fermé de E.*

(iii) *Pour tout $B\subseteq F$: $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$.*

Exercice 2 *Soient (E,d) un espace métrique et $A\subseteq E$. Définissons sur A, la fonction caractéristique $1_A:E\to\mathbb{R}$ par:*

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & si\ x\in A\\ 0 & si\ x\notin A\end{cases}$$

1. *Montrer que 1_A est continue en x si et seulement si $x\notin Fr(A)$.*
2. *A quelle condition 1_A est-elle continue sur E?*

Exercice 3 *Soit $f:(E,d)\to(\mathbb{R},|.|)$ une application. Posons pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, les ensembles:*
$F_\lambda=\{x\in E: f(x)<\lambda\}$ et $G_\lambda=\{x\in E: f(x)>\lambda\}$.

1. *Montrer que si f est continue, alors les ensembles F_λ et G_λ sont ouverts.*
2. *Montrer que l'image inverse d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de E.*
3. *Conclure.*

Exercice 4 *Soient f et g deux applications continues d'un espaces métrique (E,d) dans un espace métrique (F,d'). On considère la partie $A\subseteq E$, donnée par: $A=\{x\in E:\ f(x)=g(x)\}$. Montrer que A est fermée dans E.*

Exercice 5 *Soit l'application $f:(E,d)\to(F,\delta)$. Montrer que*

1. *f est ouverte $\Leftrightarrow \forall A\subseteq E : f(\mathring{A})\subseteq \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$*
2. *f est fermée $\Leftrightarrow \forall A\subseteq E : \overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$.*

Exercice 6 *Soit l'application $f:(E,d)\to(F,\delta)$. Montrer que*

1. *f continue et ouverte $\Leftrightarrow \forall B\subseteq F : f^{-1}(\mathring{B})=\overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$*
2. *f continue et fermée $\Leftrightarrow \forall A\subseteq E : \overline{f(A)}=f(\overline{A})$.*

Exercice 7 *Soit la fonction $f:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$, telle que :*

$$f(x)=x^2,\ \ f(x)=\frac{1}{x^2+1},$$

les fonctions suivantes sont continues , ouvertes ou fermées?

Exercice 8 *Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes:*

1. $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par :* $f(x) = \sin(x)$.
2. $g : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par :* $g(x) = \sin(x^2)$.

Exercice 9 *Soit* $f : (E, d) \to (F, \delta)$ *une application.*

1. *Vérifier qu'une application Lipschitzienne est uniformément continue.*
2. *Montrer qu'une application uniformément continue est continue.*

Exercice 10 *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne et dérivable. Montrer que* f' *est bornée.*
Est-ce que la fonction $f(x) = \sqrt{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ *est Lipschitzienne?*

Exercice 11

1. *Montrer que la fonction* $f : (]0, 1[, |.|) \to (]a, b[, |.|)$ *définie par :* $f(x) = a + (b - a)x$ *est un homéomorphisme.*
2. *Même question pour la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *définie par :* $f(x) = e^x$.