Université de Batna –2–
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
$2^{ème}$ année Licence S.A.D

Introduction à la Topologie
Mme. S. Megri
2023-2024

TRAVAUX DIRIGÉS 3
Espaces métriques complets

Exercice 1 *Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la convergence des suites suivantes :*
(i) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, *(ii)* $v_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n}$, *(iii)* $w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

Exercice 2 *L'espace* $\mathbb{R}$ *est-il complet pour l'une des métriques suivantes?*

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$,
2. $d(x,y) = |\exp x - \exp y|$,
3. $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$.

Exercice 3 *Soit* $E =]0,+\infty[$. *Pour x et y dans E, on pose :*$\delta(x,y) = |\log x - \log y|$.

1. *Vérifier que* δ *est une distance.*
2. *Soit* $d = |.|$ *la distance usuelle sur E. Montrer que l'application identité de* $(E,|.|)$ *dans* (E,δ) *est un homéomorphisme. Conclure?*
3. *Montrer que* $(E,|.|)$ *n'est pas complet.*
4. *La suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *est -elle convergente dans l'espace métrique* (E,δ)*? Est-elle une suite de Cauchy dans* (E,δ)*?*
5. *Montrer que l'espace métrique* (E,δ) *est complet.*
6. *Soit f une application de classe* $\mathscr{C}^1(E,E)$ *vérifiant:* $\exists k \in]0,1[: \forall x \in E : x\,|f'(x)| \leq k\, f(x)$.
Montrer que f admet un unique point fixe dans E.

Exercice 4 *Soit* $E =]0,+\infty[$. *Pour tout x et y dans E, on pose* $\delta(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

1. *Montrer que* δ *est bien une distance sur* $]0,+\infty[$.
2. *Montrer que* δ *et la distance usuelle sont topologiquement équivalentes.*
3. *Montrer que* (E,δ) *n'est pas complet*
4. *Montrer que* $(]0,1],\delta)$ *est complet.*

Exercice 5

1. *Montrer que pour* $x \geq 1$ *et* $y \geq 0$, *on a* $\sqrt{x+y} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$.
2. *Montrer que* $f(x) = \sqrt{x}$ *est une fonction contractante sur* $[1,+\infty[$.
3. *Déterminer le point fixe de f.*

Exercice 6 *Montrer que la fonction* $f : [1,2] \to [1,2]$ *définie par :*$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ *possède un unique point fixe à déterminer.*

Exercice 7 *Montrer que la fonction* $f :]0,\frac{1}{4}[\to]0,\frac{1}{4}[$ *définie par :*$f(x) = x^2$ *ne possède aucun point fixe.*

Exercice 8 *Soit* $f : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$ *une fonction définie par :* $f(x) = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}x$.
Montrer que f s'annule en un seul point dans $\mathbb{R}$.