Université de Batna –2–
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
$2^{ème}$ année Licence S.A.D

Introduction à la Topologie
Mme. S. Megri
2023-2024

TRAVAUX DIRIGÉS 4
Compacité et Connexité

Exercice 1 *Lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) sont compacts?*

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ *(b)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1$ *et* $0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ *(c)* $\mathbb{Q}$ *(d)* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ *(f)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1$ *et* $y = x^2\}$ *(g)* $[0,+\infty[$

Exercice 2 *Soient (E,d) un espace métrique compact et $f:(E,d) \to (F,d')$ une application continue.*

Montrer que $f(E)$ est une partie compacte.

En déduire que f est application fermée.

Exercice 3 *Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques avec (E,d) compact. Soit $f: E \to F$ une application continue et bijective.*
Montrer que F est compact et que f est un homéomorphisme.

Exercice 4 *Lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) sont connexes?*
1) $\mathbb{Q}$ *3)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$
2) $\{(t,e^t)/t \in \mathbb{R}\}$ *4)* $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times \mathbb{R})$

Exercice 5 *Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E, d). Si B est une partie de E telle que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, alors B est connexe.*

Exercice 6 *Soit $f:(E,d) \to (\{0,1\},\delta)$ où δ est la distance discrète. Montrer que E est connexe si et seulement si l'application f est constante.*

Exercice 7 *Soit $f:(E,d) \to (F,d')$ une application continue. Montrer que si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Exercice 8 *Soient A et B deux parties connexes d'un espace métrique (E,d), telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.*