Université de Batna –2–
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
$2^{ème}$ année Licence SAD

Introduction à la Topologie
Mme. S. Megri
2023-2024

TRAVAUX DIRIGÉS 5

Espaces vectoriels normés

Exercice 1 *On dèfinit sur $\mathbb{R}^2$ les trois applications suivantes:*

$$N_1((x,y)) = |x| + |y|, \;\; N_2((x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}, \;\; N_\infty((x,y)) = \max(|x|,|y|).$$

1. *Prouver que N_1, N_2, N_∞ définissent 3 normes sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Prouver que l'on a:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : N_\infty(x,y) \leq N_2(x,y) \leq N_1(x,y) \leq 2N_\infty(x,y).$$

Exercice 2

a) *Montrer que l'application $N(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |tx+y|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.*

b) *Dessiner la boule unité ouverte centrée à l'origine $(0,0)$.*

Exercice 3 *Soit $a,b > 0$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,y) = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$.*

1. *Prouver que N est une norme.*
2. *Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.*

Exercice 4 *Soit (E,d) un espace vectoriel muni d'une distance vérifiant:*

(i) *Pour tout $x,y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$*

(ii) *Pour tout $x,y,z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.*
Montrer que l'application suivante : $N(x-y) = d(x,y), \forall x,y \in E$ est une norme sur E.
Montrer que la distance discrète n'induit pas une norme.

Exercice 5 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$ les applications*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \; , \; \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} ; \; \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

- *Vérifier que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E.*
- *Montrer que pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.*
- *En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.*

Exercice 6 *Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. On pose pour tout $f \in E$:*

$$\|f\|_0 = \int_0^1 |f(x)|dx \text{ et } \|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|dx.$$

1. *Montrer que $\|.\|_0$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E.*
2. *Montrer que $\|.\|_0 \leq \|.\|_1$.*

Exercice 7 *On considère $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit l'application $u : E \to \mathbb{R}$, par $u(f) = f(1)$.*

a) *Montrer que l'application u est linéaire et continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.*

b) *Montrer que u n'est pas continue sur $(E, \|.\|_1)$.*