corrigé Type TD n°1 P2 (2018/2019)

exo 1

$T(x,y) = x^2+y^2)$

$\vec{\text{grad}}\,T = \vec{\nabla} T = \begin{pmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \\ \partial T/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{V} = \langle 2xy, x^2, x^3+y^3 \rangle$

$\text{div}\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

$\text{div}\vec{V} = 2y + 0 + 0 = 2y$

$\vec{\text{Rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$

$\text{Rot}\,\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i}$
$- \vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$

$\vec{\text{Rot}}\,\vec{V} = (3y^2-0)\vec{i} - \vec{j}(3x^2-0) + \vec{k}(2x-2x)$

$\vec{\text{Rot}}\,\vec{V} = 3y^2\vec{i} - 3x^2\vec{j}$

exo 2

a) $f(x,y) = x^2(x+y)$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x(x+y) + x^2\right]$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2 + 2xy + x^2\right]$

$= 4x + 2y + 2x$

$= 6x + 2y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2(x+y)\right]\right]$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial^2 y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2\right] = 0$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left[2x(x+y) + x^2\right]$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left[2x^2 + 2xy + x^2\right]$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + 2xy\right]$

$= 2x$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$

$= 2x$

b) $f(x,y,z,t) = \frac{1}{(x+y+z+t)^2}$

$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x+y+z+t)^{-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-2(x+y+z+t)^{-3}\right]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +6(x+y+z+t)^{-4}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(x+y+z+t)^{-4}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \;//\; = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = \cdots$$

c) $f(x,y) = xy$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (f(x,y))}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(f(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

d) $f(x,y) = \cos(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \cos xy}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-y \sin xy\right]$$

$$= -y^2 \cos xy$$

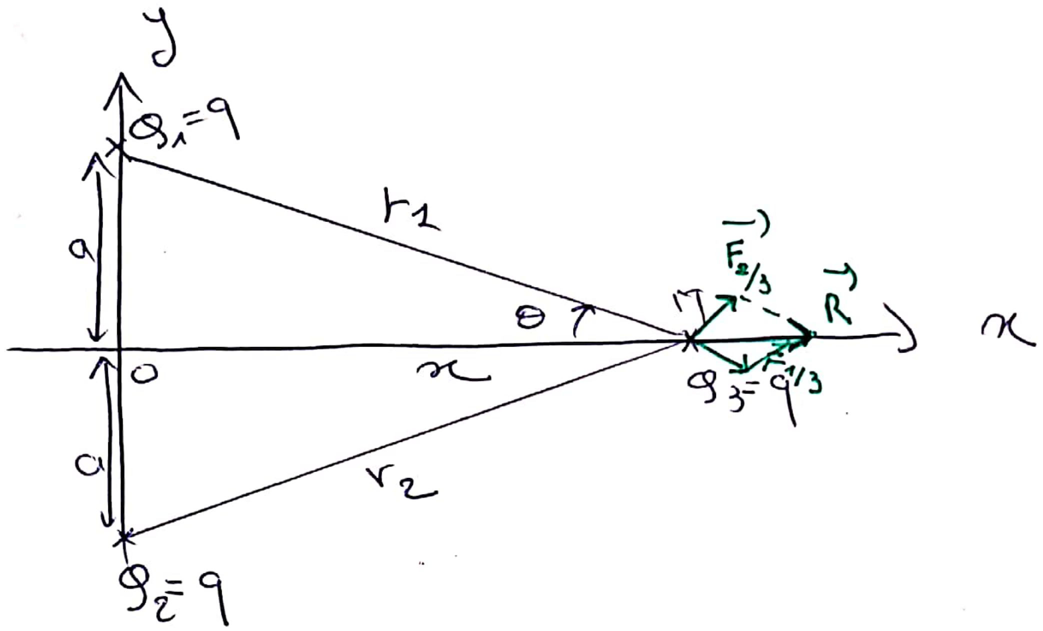
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -yx \cos xy - \sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -yx \cos xy - \sin xy$$

TD n° 1
Corrigé Type

exo 1



1) La résultante des forces qui s'applique sur q_3

$$\vec{R} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

projetons sur les axes :

sur oy ; $\vec{R}_y = 0$

sur ox ; $R_x = F_{2/3} \cdot \cos\theta + F_{1/3} \cos\theta = 2F\cos\theta$

$F_{2/3} = F_{1/3}$ $(q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2)$

$$R_x = \frac{2Kq^2}{(a^2+x^2)} \cdot \cos\theta \qquad \text{avec } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

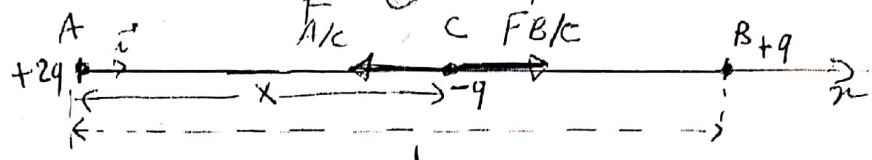
$$R_x = \frac{2Kq^2}{(a^2+x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2Kq^2 x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$\left\{ \vec{R}_x = 2{,}3\,10^{-3}\,\vec{\imath} \right\}$ $\left\{ \text{AN} : R_x = 2{,}3\,10^{-3}\ N \right\}$

Corrigé type de :

Exercice 4 :

(1)



- Les deux charges placées en A et C sont de signes opposés, donc elles s'attirent.

Si on pose $AC = x$, alors la force d'attraction =

$$|\vec{F}_{A/C}| = k\frac{|q_A|\cdot|q_C|}{x^2} = k\frac{|2q||-q|}{x^2} \Rightarrow F_{A/C} = \frac{k\,2q^2}{x^2}\cdot \text{(1)}$$

- les deux charges placées en B et C sont de signes opposés et puisque $BC = d - x$; alors :

$$|\vec{F}_{B/C}| = \frac{k\,|q_B||q_C|}{(d-x)^2} = \frac{k\,|+q||-q|}{(d-x^2)} \Rightarrow F_{B/C} = k\frac{q^2}{(d-x)^2} \quad \text{(1)}$$

La charge placée en C, est donc soumise à deux forces électriques qui ne peuvent s'équilibrer que si elles sont directement opposées. Donc : $\vec{F}_{A/C} = -\vec{F}_{B/C}$ (0,5)

$$|\vec{F}_{A/C}| = |\vec{F}_{B/C}| \Rightarrow \frac{k\,2q^2}{x^2} = \frac{k\,q^2}{(d-x)^2} \quad \text{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \Rightarrow 2(d-x)^2 = x^2$$

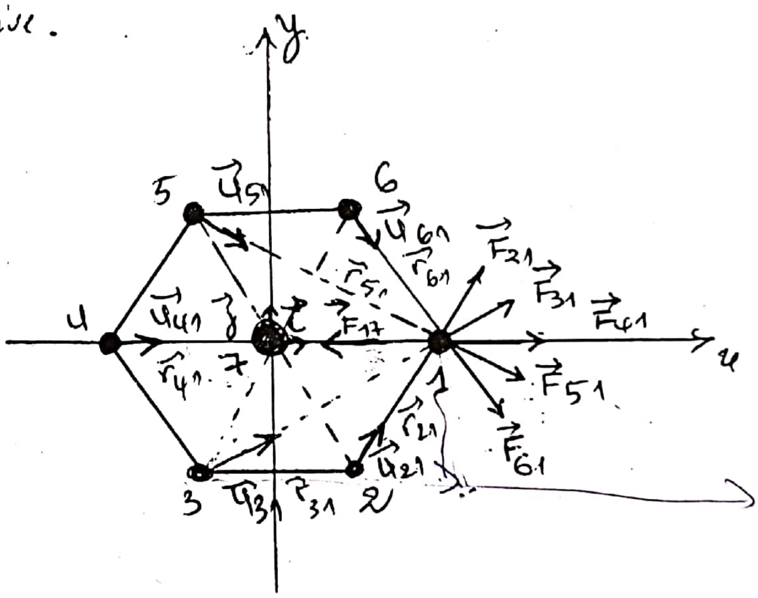
avec : $d = 0,2\,m \Rightarrow 2(d^2 - 2d.x + x^2) = x^2$

$$\Rightarrow x^2 - 0,8x + 0,08 = 0 \Rightarrow \Delta = 0,32$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,117 \text{ (0,5)} \text{ et } x_2 = 0,682 \text{ (0,5)}$$

la charge q_c est situé entre A et B, Donc : $\boxed{x = AC = 0,117\,m}$ (1)

Dans la figure ci-dessous, on a représenté le diagramme des forces pour la charge q_1. Il montre toutes les forces électriques qui agissent sur cette charge. Les charges situées aux sommets de l'hexagone régulier sont toutes positives, les forces $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{41}$, $\vec{F}_{51}$ et $\vec{F}_{61}$ sont par conséquent, répulsives. Pour que la charge Q placée au centre de l'hexagone soit en équilibre, il faut que la forces $\vec{F}_{17}$ soit attractive, égale et opposée à la résultante $\vec{F}$. Par conséquent la charge Q doit être négative.



Exprimons ces forces sous formes vectorielles, en remarquant que :

$$\begin{cases} r_{21} = r_{61} = r_{17} = a, \\ r_{51} = r_{31} = a\sqrt{3}. \\ r_{41} = 2a \end{cases}$$

$$\vec{F}_{21} = K.\frac{q^2}{r_{21}^2}.\vec{u}_{21} \quad , \vec{u}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \quad , \vec{r}_{21} = \frac{1}{2}a\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}.$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{3a^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right).$$

$$\vec{F}_{41} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{4a^2}\,\vec{i}.$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right).$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right).$$

$$\vec{F}_{17}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot Q}{a^2}\cdot\vec{i}$$

$$\vec{F}=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}+\vec{F}_{41}+\vec{F}_{51}+\vec{F}_{61}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\right)\vec{i}.$$

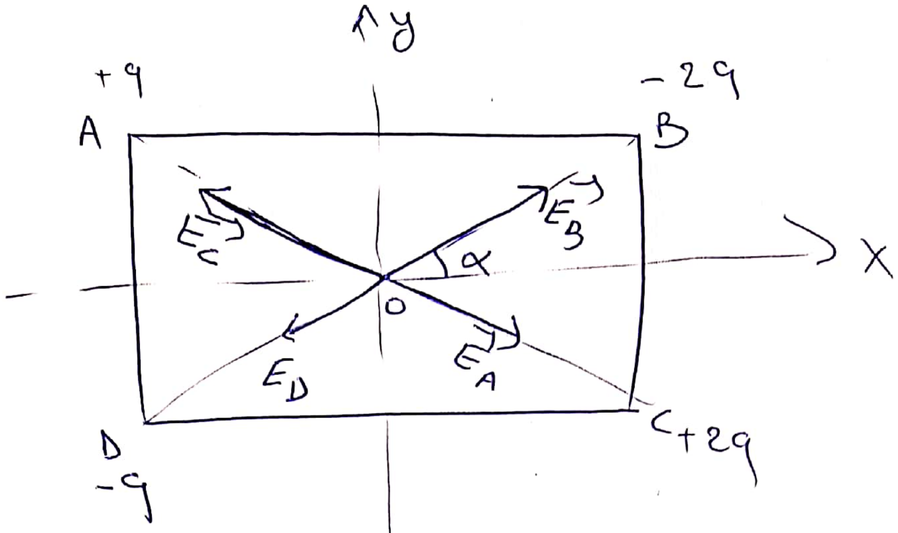
à l'équilibre : $\sum_i \vec{F}_i=\vec{F}+\vec{F}_{17}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{F}=-\vec{F}_{17}$:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\right)\vec{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot Q}{a^2}\vec{i}.$$

$$\Rightarrow Q=q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\right)$$

La charge 7 est de signe opposé à celui des autre charges, elle est négative et vaut : $-Q=-q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\right)$. [C].

exo 7



$$\vec{E_T} = \vec{E_A} + \vec{E_B} + \vec{E_C} + \vec{E_D}$$

~~Lox~~ $E_A \cos\alpha + E_B \cos\alpha - E_C \cos\alpha - E_D \cos\alpha = E_x$

$\perp oy$ $- E_A \sin\alpha + E_B \sin\alpha + E_C \sin\alpha - E_D \sin\alpha = E_y$

$$\begin{cases} E_x = (E_A + E_B - E_C - E_D)\cos\alpha = 0 \\ E_y = (-E_A + E_B + E_C - E_D)\sin\alpha = (2E_B - 2E_A)\sin\alpha \end{cases}$$

$E_A = \dfrac{K|q_A|}{OA^2} = \dfrac{Kq}{5/4\, a^2} = \dfrac{4Kq}{5a^2}$

$E_B = \dfrac{k|q_B|}{OB^2} = \dfrac{K \cdot 2q}{5/4\, a^2} = \dfrac{8Kq}{5a^2}$

$E_C = \dfrac{K|q_C|}{OC^2} = \dfrac{8Kq}{5a^2} = E_B$

$E_D = \dfrac{K|q_D|}{OD^2} = \dfrac{4Kq}{5a^2} = E_A$

$OA = OB = OC = OD = r$

$r^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \dfrac{5}{4}a^2$

d'où on a

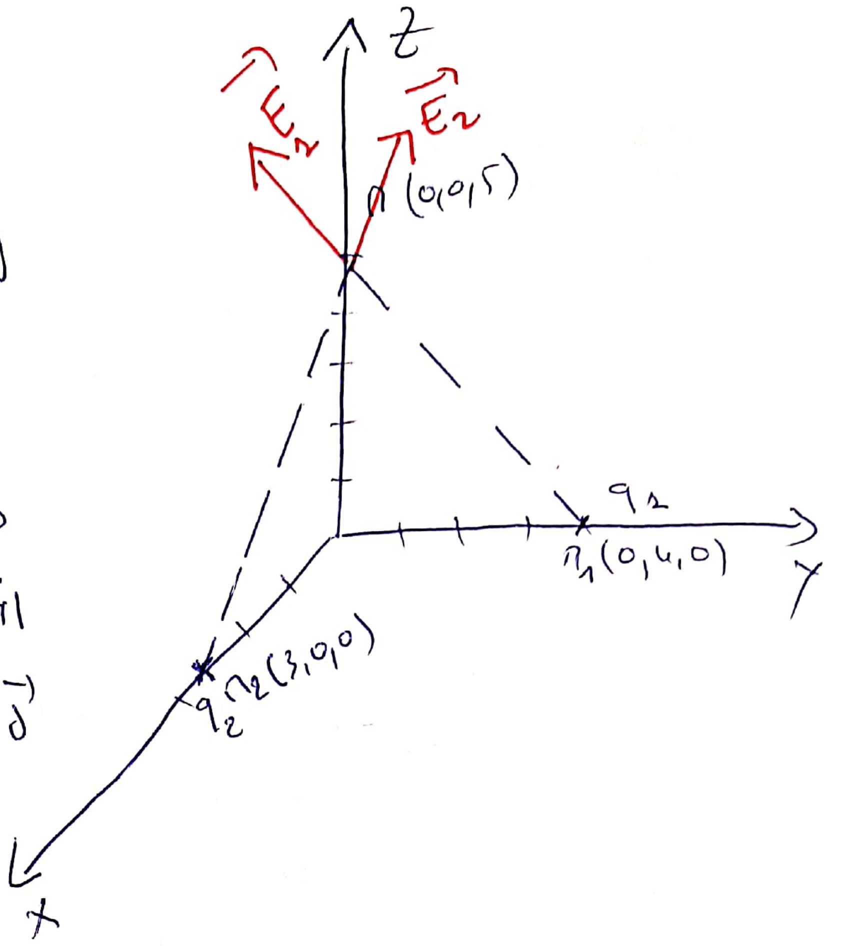
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 2\left(\dfrac{8Kq}{5a^2} - \dfrac{4Kq}{5a^2}\right)\sin\alpha \end{cases}$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}\frac{Kq}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8 \times 9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-1}}{5\sqrt{5}\,(0{,}04)^2}$$

$$\vec{E_T} = 0\vec{i} + E_y\vec{j}$$

pour le sens et la direction voir figure.

exo 8



$$\vec{E}(M) = \vec{E_1}(M) + \vec{E_2}(M)$$

$$\vec{E_1}(M) = K \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{M_1M}$$

$$\vec{E_1}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|M_1M|^2} \cdot \frac{\vec{M_1M}}{|\vec{M_1M}|}$$

$$\vec{M_1M} = (x_M - x_{M_1})\vec{i} + (y_M - y_{M_1})\vec{j} + (z_M - z_{M_1})\vec{k}$$

$$\vec{M_1M} = 0\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{M_1M}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

d'où $\vec{E_1}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{41} \cdot \frac{(-4\vec{j} + 5\vec{k})}{\sqrt{41}} = -48{,}02\vec{j} + 60{,}02\vec{k}$ (V/m)

de même pour $\vec{E_2}(M) = K \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{M_2M}$

$$\vec{E_2}(M) = K \frac{q_2}{|\vec{M_2M}|^2} \cdot \frac{\vec{M_2M}}{|\vec{M_2M}|}$$ avec $\vec{M_2M} = -3\vec{i} + 5\vec{k}$

$$|\vec{M_2M}| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow \vec{E_2}(M) = (-74{,}92\vec{i} + 124{,}86\vec{k}) \quad (V/m)$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E_1}(M) + \vec{E_2}(M) = -74{,}92\vec{i} - 48{,}02\vec{j} + 184{,}88\vec{k}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{(74{,}92)^2 + (48{,}02)^2 + (184{,}88)^2} = 205{,}18 \text{ V/m ou N/C}$$

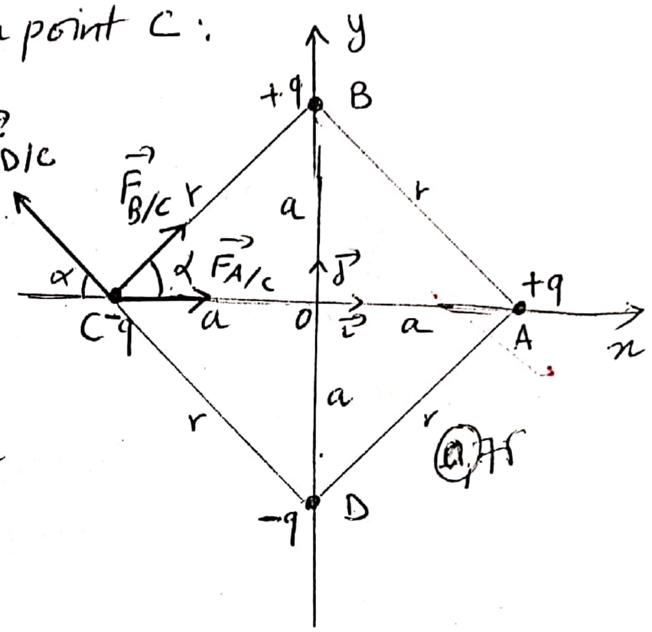
$$\vec{F} = q_3\vec{E} = 9{,}23 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

Corrigé type

Exo 9 :

1- Vecteur force électrostatique au point C :

$\sum \vec{F}_{/c} = \vec{F}_{A/c} + \vec{F}_{B/c} + \vec{F}_{D/c}$: 0,25



Projection selon l'axes (ox, oy)

$$x\begin{cases} F_{x/c} = +F_{A/c} + F_{B/c}\cos\alpha - F_{D/c}\cos\alpha & 0,5 \\ F_{y/c} = 0 + F_{B/c}\sin\alpha + F_{D/c}\sin\alpha & 0,5 \end{cases}y$$

$$|\vec{F}_{A/c}| = \frac{k|q_A|\cdot|q_c|}{(2a)^2} = \frac{kq^2}{(2a)^2} \quad 0,25$$

$$F_{B/c} = \frac{k|q_B||q_c|}{(BC)^2} = \frac{kq^2}{2a^2}\ 0,25 \ ; \quad F_{D/c} = \frac{k|q_D||q_c|}{(DC)^2} = \frac{kq^2}{2a^2} \quad 0,25$$

avec : $|q_A| = |q_B| = |q_c| = |q_D| = q$; $\alpha = 45° \rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,25

et : $AC = 2a$ 0,25 ; $BC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$; $DC = a\sqrt{2}$. 0,25

donc :

$$\begin{cases} F_{x/c} = \frac{kq^2}{(2a)^2} + \frac{kq^2}{2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{kq^2}{2a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{kq^2}{(2a)^2} & 0,5 \\ F_{y/c} = \frac{kq^2}{2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{kq^2}{2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kq^2}{a^2} & 0,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{r/c} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

$$\vec{F}_{r/c} = \frac{kq^2}{2a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}\right) N \quad 0,5$$

et $$|\vec{F}_{r/c}| = \frac{kq^2}{2a^2}\sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{4}\frac{kq^2}{a^2} N \quad 0,5$$

c/

2- Le champ électrostatique au point C :

On a : $\vec{F}_{/C} = q_C \cdot \vec{E}_{/C}$ 0,5 $\Rightarrow \vec{E}_{/C} = \frac{\vec{F}_{/C}}{q_C} = \frac{-kq}{2a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}\right)$

$|\vec{E}_{/C}| = \frac{|\vec{F}_{/C}|}{|q_C|} = \frac{3}{4}\frac{kq}{a^2}$ N/m 0,5

puisque : $q_C = -q$. 0,5

3- Le potentiel en O :

$$V_{/O} = \sum_{i=1}^{4} V_i = V_A + V_B + V_C + V_D \quad 0{,}5$$

$$V_{/O} = \frac{kq_A}{a} + \frac{kq_B}{a} + \frac{kq_C}{a} + \frac{kq_D}{a}$$

$$V_{/O} = \frac{kq}{a} + \frac{kq}{a} - \frac{kq}{a} - \frac{kq}{a} = 0 \quad 0{,}5$$

$$V_{/O} = 0\ \text{V}$$