TD 1 P1 (F211) – RAPPELS MATHEMATIQUES

EXERCICE 1/

$\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{V} = 3\vec{j}$ $\vec{W} = -2\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{X} = 3\vec{i}$

1) Exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs suivants : $\vec{U} + \vec{V}$; $\vec{W} - \vec{X}$; $-3\vec{U}$; $-2\vec{W} - \vec{X}$

$$\vec{U} + \vec{V} = (2\vec{i} + \vec{j}) + 3\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{U} + \vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j}}$$
$$\vec{W} - \vec{X} = (-2\vec{i} + \vec{j}) - 3\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{W} - \vec{X} = -5\vec{i} + \vec{j}}$$
$$-3\vec{U} = -3(2\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \boxed{-3\vec{U} = -6\vec{i} - 3\vec{j}}$$
$$-2\vec{W} - \vec{X} = -2(-2\vec{i} + \vec{j}) - 3\vec{i} \Rightarrow \boxed{-2\vec{W} - \vec{X} = \vec{i} - 2\vec{j}}$$

2) $\vec{R} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{P} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{T} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

a) Calculer le module de chaque vecteur

$$\vec{R} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \|\vec{R}\| = \sqrt{(+2)^2 + (+3)^2 + (-1)^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{R}\| = \sqrt{14}\ UI}$$
$$\vec{P} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \|\vec{P}\| = \sqrt{(+3)^2 + (-2)^2 + (+2)^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{P}\| = \sqrt{17}\ UI}$$
$$\vec{T} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \|\vec{T}\| = \sqrt{(+4)^2 + (-3)^2 + (+3)^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{T}\| = \sqrt{34}\ UI}$$

b) Calculer les composantes et le module des vecteurs

$$\vec{A} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow \vec{A} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) + \left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) + \left(4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}}$$

avec $\|\vec{A}\| = \sqrt{(+9)^2 + (-2)^2 + (+4)^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{A}\| = \sqrt{101}\ UI}$

$$\vec{B} = \vec{R} + 2\vec{P} - \vec{T} \Rightarrow \vec{B} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) + 2\left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j}}$$

avec $\|\vec{B}\| = \sqrt{(+4)^2 + (+2)^2 + (0)^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{B}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ UI}$

$$\vec{C} = \vec{R} + 2\vec{P} \Rightarrow \vec{C} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) + 2\left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{C} = 8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}$$

avec $\|\vec{C}\| = \sqrt{(+8)^2 + (-1)^2 + (+3)^2} \Rightarrow \boxed{\|\mathrm{C}\| = \sqrt{74}\ UI}$

c) Quel est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{C}$

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{C}$, tel que :

$$\vec{u} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \frac{8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{74}} = \frac{8}{\sqrt{74}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{74}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{74}}\vec{k}}$$

d) Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{P}$

$*$ *Le produit scalaire* $\vec{R}.\vec{P}$

$$\vec{R}.\vec{P} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right).\left(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$
$$= (+2)(+3) + (+3)(-2) + (-1)(+2)$$
$$\vec{R}.\vec{P} = -2\ UI$$

$*$ *Le produit vectoriel* $\vec{R} \wedge \vec{P}$

$$\vec{R} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\overbrace{\vec{\imath}}} & \overset{-}{\overbrace{\vec{\jmath}}} & \overset{+}{\overbrace{\vec{k}}} \\ +2 & +3 & -1 \\ +3 & -2 & +2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} +3 & -1 \\ -2 & +2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} +2 & -1 \\ +3 & +2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} +2 & +3 \\ +3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= [(+3)(+2) - (-1)(-2)]\vec{\imath} - [(+2)(+2) - (-1)(+3)]\vec{\jmath} + [(+2)(-2) - (+3)(+3)]\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} \wedge \vec{P} = 4\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 13\vec{k}}$$

En déduire l'angle $(\widehat{\vec{R}, \vec{P}})$

$\vec{R}.\vec{P} = \|\vec{R}\|.\|\vec{P}\|.\cos\alpha$ tel que $\alpha = (\widehat{\vec{R}, \vec{P}})$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{R}.\vec{P}}{\|\vec{R}\|.\|\vec{P}\|}$$

$$= \frac{-2}{\boxed{\sqrt{14}}.\boxed{\sqrt{17}}}$$

$\cos\alpha = -0{,}1296 \iff \boxed{\alpha = 97{,}4488°}$

EXERCICE 2/

M_1 (1,1,1) ; M_2(2,2,1) ;M_3 (2,1,0)

a) Trouver l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{M_2M_1}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{M_2M_3}}$

$\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3} = \|\overrightarrow{M_2M_1}\|.\|\overrightarrow{M_2M_3}\|.\cos\alpha$ tel que $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{M_2M_3}}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3}}{\|\overrightarrow{M_2M_1}\|.\|\overrightarrow{M_2M_3}\|}$$

$\overrightarrow{M_2M_1} = ??$

$\overrightarrow{M_2M_1} = (1-2)\vec{\imath} + (1-2)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{M_2M_1} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\|\overrightarrow{M_2M_1}\| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{M_2M_3} = (2-2)\vec{\imath} + (1-2)\vec{\jmath} + (0-1)\vec{k} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{M_2M_1} = -\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\|\overrightarrow{M_2M_3}\| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3} = (-\vec{\imath} - \vec{\jmath}).\left(-\vec{\jmath} - \vec{k}\right) = +1$

Alors :

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = 60°}$

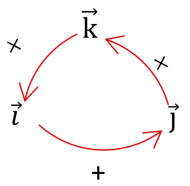
b/ évaluer les vecteurs suivants : $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}$; $\vec{\jmath}\wedge\vec{k}$; $\vec{k}\wedge\vec{\jmath}$; $\vec{k}\wedge\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath}$; $\vec{k}\wedge\vec{k}$; $\vec{\jmath}\wedge 4\vec{k}$

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$

$\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$

$\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$



$\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|.\|\vec{\jmath}\|.\sin\left(\widehat{\vec{\jmath},\vec{\jmath}}\right) = 1.1.\underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$

$\vec{k} \wedge \vec{k} = \|\vec{k}\|.\|\vec{k}\|.\sin\left(\widehat{\vec{k},\vec{k}}\right) = 1.1.\underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$

$\vec{\jmath} \wedge 4\vec{k} = (1.4)\left(\vec{\jmath} \wedge \vec{k}\right) = 4\vec{\imath}$

EXERCICE 3/

A(1,0,0) , B(√2/4,√6/4,√2/2).

Coordonnées cylindriques

On a :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Pour $A(x = 1, y = 0, z = 0)$:

$$\begin{cases} r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0° \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\boxed{A(x = 1, y = 0, z = 0) \equiv \mathrm{A}(\mathrm{r} = 1, \theta = 0°, \mathrm{z} = 0)}$

Pour $B\left(x = \frac{\sqrt{2}}{4}, y = \frac{\sqrt{6}}{4}, z = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\begin{cases} r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right) = 60° = \frac{\pi}{3} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc $\boxed{B\left(x = \frac{\sqrt{2}}{4}, y = \frac{\sqrt{6}}{4}, z = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \equiv \mathrm{B}(\mathrm{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}\ , \mathrm{z} = \frac{\sqrt{2}}{2})}$

Coordonnées sphériques

On a :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \\ \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Pour $A(x = 1, y = 0, z = 0)$:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0° \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 90° = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc $\boxed{A(x = 1, y = 0, z = 0) \equiv \mathrm{A}(\rho = 1, \theta = 0°, \varphi = \frac{\pi}{2})}$

Pour $B\left(x=\frac{\sqrt{2}}{4}, y=\frac{\sqrt{6}}{4}, z=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1 \\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)=60°=\frac{\pi}{3} \\ \varphi=\cos^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}\right)=45°=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Donc $\boxed{B\left(x=\frac{\sqrt{2}}{4}, y=\frac{\sqrt{6}}{4}, z=\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \equiv \mathrm{B}(\rho=1, \theta=\frac{\pi}{3}, \varphi=\frac{\pi}{4})}$