Université : BATNA 2
Département du Socle Commun en Maths et Informatique
Module : Algèbre II

Exercices supplémentaires (Espaces vectoriels- Sous-espaces vectoriels)

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3 Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$;
2. $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (1, -2)$, $u_3 = (2, 3)$, $u_4 = (-4, 5)$;
3. $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (2, 5, -3)$, $u_2 = (1, 3, 2)$, $u_3 = (1, -1, 4)$;
4. $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (3, 1, m)$, $u_2 = (1, 3, 2)$, $u_3 = (1, 1, -4)$. (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 4 On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?