Université Batna 2
Département Maths-Informatique

Exercices supplémentaires (Algèbre2)

Espaces vectoriels

Exercice 01 :

Déterminer les quels des ensembles E_1,E_2 et E_3 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x - 7y = z\right\} \\ E_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\right\} \\ E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = 3z\} \end{aligned}$$

Exercice 02 :

Soit $E = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires

$$F = \{f(-x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$$

et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires

$$G = \{f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$$

-Est ce que F et G sont des sous espaces vecoriels ?

Exercice 03 :

Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\begin{aligned} &u_1(2,3), u_2(1,5) \text{ dans } \mathbb{R}^2; \\ &v_1(1,0,1), v_2(0,2,2), v_3(3,7,1) \text{ dans } \mathbb{R}^3; \\ &w_1(1,0,0), w_2(0,1,1), w_3(1,1,1) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

1/ Est-ce que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2/ Est-ce que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 04 :

Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\} \\ E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = 3z\} \end{aligned}$$

Solutions des exercices suplémentaires

Exercice 01 :

Définition d'un sous espace vectoriel.

Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
- $\lambda.u \in F$ pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $u \in F$.

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - 7y = z\}$ est un sous espace vectoriel si :

- $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$
- Soient $X = (x, y, z)$et $X\prime = (x\prime, y\prime, z\prime)$ deux éléments de E_1. Alors $X + X\prime = (x + x\prime, y + y\prime, z + z\prime)$ est aussi élément de E_1. En effet,

$3(x + x\prime) - 7(y + y\prime) = z + z\prime$

De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.X$ est élément de E_1. E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

-La même methode pour E_2, E_3.

Exercice 02 :

C'est très simple à vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. par exemple pour F :

(a) la fonction nulle est une fonction paire,

(b) si $f, g \in F$ alors $f + g \in F$,

(c) si $f \in F$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$alors $\lambda.f \in F$. F est un espace vectoriel (de même pour G).

Exercice 03 :

Définition

Une famille $\{v_1, v_2, ..., vp\}$ de E est une famille **libre** ou **linéairement indépendante** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p vp = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda p = 0$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on

dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une relation de **dépendance linéaire** entre les vj .

$\{v_1(1,0,1), v_2(0,2,2), v_3(3,7,1)\}$ est une famile libre dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p vp = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,2,2) + \lambda_3(3,7,1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\frac{7}{2}\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc $\{v_1(1,0,1), v_2(0,2,2), v_3(3,7,1)\}$ est une famile libre dans $\mathbb{R}^3$.

Définition

Soient $v_1, v_2, ..., v_n$ des vecteurs de E. La famille $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ est une famille **génératrice** de l'espace vectoriel E

si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$.

Ce qui peut s'écrire aussi :

$\forall v \in E$, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$

On dit aussi que la famille $(v_1, v_2, ..., v_n)$ **engendre** l'espace vectoriel E.

Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ forment

une famille **génératrice** de E si et seulement si $E = Vec(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Définition (Base d'un espace vectoriel).

Soit E un K-espace vectoriel. Une famille $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si B est une famille **libre et génératrice**.

Théorème

Soit $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une **base** de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon **unique**

comme combinaison linéaire d'éléments de B. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$ uniques

tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

$\cdot\{v_1, v_2, v_3\}$ est une **base** de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ 1) $-$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famile **libre**
2) $-$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une partie **génératrice**

$\cdot\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famile libre d'aprés la question précédente

$\{v_1, v_2, v_3\}$ est une partie génératrice$\Leftrightarrow$ $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) &= \alpha(1,0,1)+\beta(0,2,2)+\gamma(3,7,1)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\alpha+3\gamma\\ y=2\beta+7\gamma\\ z=\alpha+2\beta+\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-3\gamma=\alpha\\ y-7\gamma=2\beta\\ z=x-3\gamma+y-7\gamma+\gamma \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=\frac{2x+y-z}{3}\\ \beta=\frac{1}{18}(-7x+2y+7z)\\ \gamma=\frac{x+y-z}{9} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$