Chapitre 1 : Notions de logique

1. Logique :

1.1. Assertion : Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps

Exemples : P et Q sont des assertions où $P : 2+2=4$ et $Q : 2\times3=7$.

1.2. Les opérateurs logiques : Soit P une assertion et Q une autre assertion.

1.2.1. L'opérateur logique « et ».

* L'assertion P et Q notée $(P \wedge Q)$ est vraie si P est vraie et Q est vraie
* L'assertion $P \wedge Q$ est fausse sinon.

La table de vérité résume ceci :

P	V	F	V	F
Q	V	F	F	V
$P \wedge Q$	V	F	F	F

Exemple : $(2+2=4) \wedge (2\times3=7)$ est fausse.

1.2.2. L'opérateur logique « ou ».

* L'assertion P ou Q notée $(P \vee Q)$ est vraie si l'une des deux assertions est vraie.
* L'assertion $P \vee Q$ est fausse si les deux assertions sont fausse

La table de vérité est la suivante :

P	V	F	V	F
Q	V	F	F	V
$P \vee Q$	V	F	V	V

Exemple : $(2+2=4) \vee (2\times 3=7)$ est vraie.

1.2.3. La négation « non ».

* L'assertion non P notée $\overline{P}$ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

La table de vérité est la suivante :

P	V	F
$\overline{P}$	F	V

Exemple : si P : $2+2=4$ alors $\overline{P} = 2+2\neq 4$ est fausse.

1.2.4. L'implication : « $\Longrightarrow$ ».

La définition mathématiques est la suivante :

$\overline{P} \vee Q$ et est notée $P \Longrightarrow Q$.

Sa table de vérité est la suivante :

P	V	F	V	F
Q	V	F	F	V
$\overline{P}$	F	V	F	V
$\overline{P}\vee Q$	V	V	F	V

Exemple : $\sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ est fausse car pour $\theta = 2\pi$ par exemple.

1.2.5. L'équivalence « $\Longleftrightarrow$ ».

L'équivalence est définie par :

$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ et est notée $P \Longleftrightarrow Q$

* L'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie lorsque P et Q sont vraie ou lorsque P et Q sont fausses.

La table de vérité est :

P	V	F	V	F
Q	V	F	F	V
$\overline{P}$	F	V	F	V
$\overline{Q}$	F	V	V	F
$P \Rightarrow Q : \overline{P} \vee Q$	V	V	F	V
$Q \Rightarrow P \quad \overline{Q} \vee P$	V	V	V	F
$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) : P \Leftrightarrow Q$	V	V	F	F

1.2. Quantificateurs

Exemple : $x^2 \geq 1$ n'est pas une assertion

Si une assertion P peut dépendre d'un paramètre x alors l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.

1.2.1. Quantificateur $\forall$ « pour tout » :

L'assertion $\forall x \in E : P(x)$ est vraie si les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Exemple :
* $\forall x \in [1, +\infty[: x^2 \geq 1$ vraie.
* $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ fausse.

1.2.2. Quantificateur $\exists$ « il existe » :

L'assertion $\exists x \in E : P(x)$ est vraie si on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vrai

Exemple :
* $\exists x \in \mathbb{R} : x(x-1) < 0$ vraie car par exemple pour $x = \frac{1}{2}$.
* $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ est fausse

Car aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.

1.2.3. La négation des quantificateurs :

* La négation de $\forall x \in E : P(x)$ est $\exists x \in E : \overline{P(x)}$

Exemple : $\overline{\forall x \in [1, +\infty[: x^2 \geq 1} \equiv \exists x \in [1, +\infty[: x^2 < 1$

* La négation de $\exists x \in E : P(x)$ est $\forall x \in E : \overline{P(x)}$.

Exemple :

$\overline{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0 : x+y > 10} \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 : x+y \leq 10.$

Remarque 1 :

L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y > 0$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x+y > 0$

sont différentes. La première est vraie car y peut dépendre de x par exemple $y = 1 - x$. Par contre la seconde est fausse car par exemple $x = -1 - y$

Remarque 2 :

On ajoutant un point d'exclamation $\exists ! x \in E : P(x)$, nous signifions que l'assertion est vraie pour une valeur unique

2) Raisonnement : Voici les méthodes classiques de Raisonnements.

2-1) Raisonnement direct : On veut montrer $P \Rightarrow Q$

On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie

Exemple : Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$.

$a \in \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^* \quad a = \frac{p}{q}$ De même

$b \in \mathbb{Q} : \exists p' \in \mathbb{Z}, \exists q' \in \mathbb{Z}^* \quad b = \frac{p'}{q'}$ de sorte que

$a+b = \frac{pq' + qp'}{pp'}$.

Or le numérateur $pq' + qp' \in \mathbb{Z}$ et le dénominateur $pp' \in \mathbb{Z}^*$ Donc $a+b = \frac{p''}{q''}$ et $a+b \in \mathbb{Q}$.

2-2) Cas par Cas :

Si l'on souhaite vérifier $\forall x \in E : P(x)$,

On montre l'assertion $\forall x \in A : P(x)$ et $\forall x \notin A : P(x)$

où A une partie de E.

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, Nous distinguons deux cas :

$x \geq 1$: $(x-1)^2 + 1 \geq 0$.

$x < 1$: $x^2 \geq 0$.

Conclusion : Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 1/ **2-3°/ Contraposée :** Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante : $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Donc si l'on souhaite montrer $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer que n^2 n'est pas pair.

n n'est pas pair, il est impair et donc $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$.

$\Rightarrow n^2 = 2l+1$ avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 n'est pas pair. Par contraposition ceci est équivalent à si n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair.

2-4°/ Absurde : Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction, cette contradiction affirme que si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exemple :

Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $\Rightarrow a = b$.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

(1) : $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. (1) $\Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b)$.

Comme $a \neq b$ par hypothèse, $a - b \neq 0$ et donc $a + b = -1$. En voyant que la somme de deux nombres positifs ne peut pas être négatif. Nous obtenons une contradiction. Donc si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.

2.5/ • **Contre exemple** : Pour montrer que l'assertion $\forall x \in E : P(x)$ est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.
Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in E : P(x)$.

Exemple : Montrer que cette assertion est fausse :
Tout entier positif est somme de trois carrés.
Contre exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

2.6/ **Récurrence** : Pour montrer $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, on doit réaliser trois étapes :
1/ Initialisation : On prouve $P(0)$.
2/ Hérédité : On suppose $P(n)$ est vraie pour $n \geq 0$ et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
3/ Conclusion : par le principe de récurrence, on rappelle que l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ est vraie.

Exemple : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ 2^n \geq n$.
Notons $P(n)$ l'assertion suivante : $\forall n \geq 0 : 2^n \geq n$
Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie.
1/ Inisialisation : $P(0)$: $2^0 = 1 \geq 0$. est vraie.
2/ Hérédité : Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est aussi vraie.
On a : $2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2^n + 2^n$
$> n + 2^n$ (par $P(n)$ nous avons $2^n \geq n$.)
$> n + 1$ car $2^n > 1$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
3/ Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 0$. i.e. $2^n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.