COURS VIBRATIONS

Introduction au cours

L'étude des vibrations des systèmes industriels nous permet le contrôle des amplitudes des vibrations surtout lors des phénomènes de résonance.

Le but de ce cours est l'étude des phénomènes fondamentaux de la mécanique des vibrations et la mise en équation des systèmes et leur résolution.

On traite principalement des éléments discrets tels que ressort, masse, amortisseur.

Dans le chapitre 1, on étudie les systèmes, masse, ressort, amortisseur, à un degré de liberté. Le chapitre 2 concerne les systèmes à deux degrés puis N degrés de liberté. C'est le contenu de la première partie du cours.

Eléments de bibliographie

[1] M. Lalanne, J. Der Hagopian, P. Berthier, Mécanique des vibrations linéaires, Masson, 1986

[2] M. Lalanne, Guy Ferraris, Rotordynamics Prediction in engineering, john Wiley & Sons Ltd, 1990

Chapitre 1 : Vibrations des systèmes à un degré de liberté

Le modèle étudie le mouvement d'une masse (modélisant un corps rigide) par rapport à un support fixe, les deux sont liés par une raideur et un amortissement.

La masse possède un seul mouvement, translation ou rotation, donc elle a un degré de liberté (1ddl).

L'étude des systèmes à un degré de liberté permet de comprendre les phénomènes élémentaires en mécanique des vibrations.

Le système de la figure 1 présente les systèmes à un degré de liberté. Le déplacement x de la masse m est supposé dans un plan vertical et =mesuré à partir de la position d'équilibre.

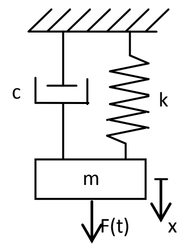

Figure 1

<u>Les forces appliquées sur la masse</u>

1. Le ressort de raideur k produit sur la masse une force de rappel (–kx)
2. L'amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c produit

   sur la masse une force résistante au mouvement $(-c\dot{x})$.

3. La force extérieure, fonction du temps F(t)

<u>Remarque</u> : Le signe (-) est dû à la force qui s'oppose au déplacement de la masse.

<u>L'équation du mouvement de la masse</u>

L'application du principe fondamental de la dynamique :

$\sum forces\ agissantes\ sur\ la\ masse = m\ddot{x}$ (*)

donne l'équation différentielle traduisant le comportement du système :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \qquad (1)$$

1. Mouvement libre

En absence de force extérieure, on dit que le système est en mouvement libre et l'équation (1) devient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

Les solutions de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants sont de la forme :

$$x = Ae^{rt} \tag{3}$$

En remplaçant (3) dans (2), on obtient :

$$mr^2 + cr + k = 0 \tag{4}$$

C'est l'équation caractéristique du système. Elle n'est fonction que de ses paramètres (masse, raideur, amortissement).

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}}\right] \tag{5}$$

et la solution générale de l'équation différentielle (2) s'écrit :

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{6}$$

On introduit deux paramètres physiques mesurables:

la pulsation ou fréquence propre :

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \tag{7}$$

et le facteur d'amortissement :

$$\alpha = \frac{c}{c_c} \tag{8}$$

c_c. est l'amortissement critique. C'est la valeur de l'amortissement qui annule le discriminant de (4), cad :

$$\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m} = 0 \tag{9}$$

$$c_c = 2\sqrt{km} \tag{10}$$

En utilisant (7), l'amortissement critique devient :

$$c_c = 2m\omega \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega} \tag{12}$$

$$c = 2\alpha m\omega \tag{13}$$

Les solutions de l'équation caractéristiques s'écrivent donc :

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \qquad (14)$$

On remarque que les solutions (14) de l'équation différentielle, dépendent du facteur d'amortissement α. Trois cas possibles : deux racines réelles, une racine double ou deux racines complexes.

1. α <1

L'amortissement est inférieur à la valeur critique. Les racines (14) sont complexes.

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm j\omega\sqrt{1 - \alpha^2} \qquad (15)$$

Et la solution (6) devient :

$$x = A_1 e^{(-\alpha\omega + j\omega\sqrt{1-\alpha^2})t} + A_2 e^{(-\alpha\omega - j\omega\sqrt{1-\alpha^2})t} \qquad (16)$$

Comme *x* est réel, A_1 et A_2 sont des constantes complexes arbitraires.

et l'équation (16) peut s'écrire sous la forme :

$$x = A\, e^{-\alpha\omega t} \sin(\omega_a t + \varphi) \qquad (17)$$

avec

$$\omega_a = \omega\sqrt{1 - \alpha^2} \qquad (18\ a)$$

ω_a est la pulsation propre du système amorti. Les constantes A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales : $x_0 = x(0)$ et $\dot{x_0} = \dot{x}(0)$.

$$A = \sqrt{\frac{(\dot{x_0} + \alpha\omega_0 x_0)^2 + (x_0\omega_a)^2}{{\omega_a}^2}} \qquad (18\ b)$$

$$\varphi = arctan\frac{x_0\omega_a}{\dot{x_0} + \alpha\omega_0 x_0} \qquad (18\ c)$$

Donc, dans le cas d'un amortissement inférieur à l'amortissement critique, la masse effectue des oscillations vibratoires amortis (voir figure 2).

2. α >1

Les solutions (14) sont dans ce cas deux racines réelles :

$$r_1 = -\alpha\omega + \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \quad , \quad r_2 = -\alpha\omega - \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \qquad (19)$$

La solution (6) s'écrit :

$$x = A_1 e^{(-\alpha\omega + \omega\sqrt{\alpha^2-1})t} + A_2 e^{(-\alpha\omega - \omega\sqrt{\alpha^2-1})t} \qquad (20)$$

L'application des conditions initiales, nous donne les constantes A_1 et A_2 :

$$A_1 = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)\omega x_0 + \dot{x_0}}{2\omega\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

$$A_2 = \frac{\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)\omega x_0 - \dot{x_0}}{2\omega\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

Dans le cas d'un amortissement supérieur à l'amortissement critique (système sur-amorti), la masse n'effectue aucune oscillation (voir figure 2).

3. α =1

Les solutions (14) donnent une racine double :

$$r_1 = r_2 = -\omega \qquad (21)$$

Dans ce cas la solution de (2) est de la forme :

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega t} \qquad (22)$$

L'application des conditions initiales $x_0 = x(0)$ et $\dot{x_0} = \dot{x}(0)$, donne les valeurs de A_1 etA_2.

$$x = (x_0 + \omega x_0 t + \dot{x_0} t)e^{-\omega t} \qquad (22\ a)$$

C'est la limite entre le mouvement oscillatoire et le mouvement non-oscillatoire.

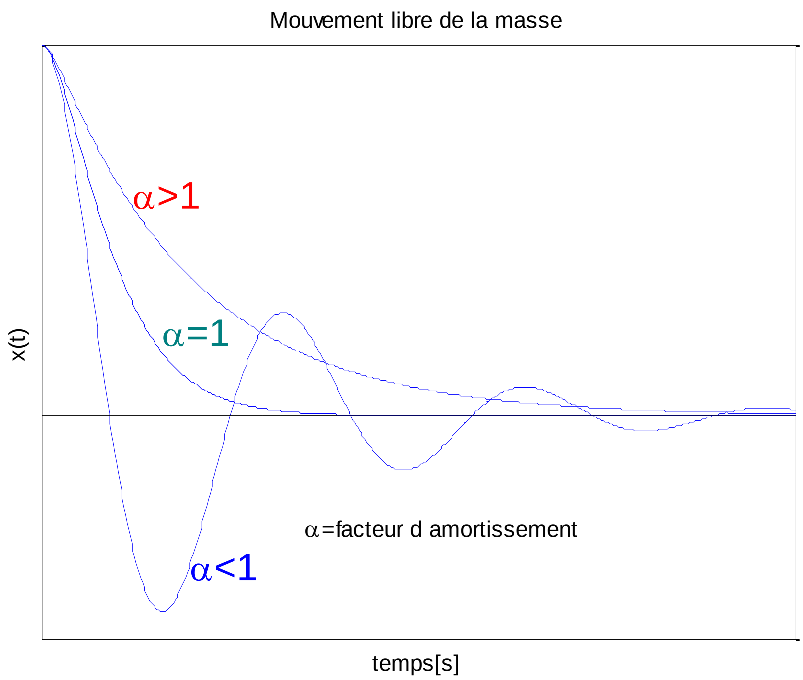

Figure 2

Détermination expérimentale du facteur d'amortissement

L'amortissement et le facteur d'amortissement sont difficiles à déterminer. On utilise des mesures dynamiques pour les déterminer.

La détermination expérimentale se fait par la mesure du décrément logarithmique. On calcule le logarithme népérien du rapport de deux amplitudes maximales x(t) et x(t+nT), lues sur la courbe du déplacement x(t).

Valeur de δ par mesure $$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+nT)}$$

(23)

Valeur de δ par calcul $$\delta \approx \ln\frac{e^{-\alpha\omega t}}{e^{-\alpha\omega(t+nT)}}$$

$$\delta = n\alpha\omega T$$

$$= 2\pi n\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (24)$$

Dans les systèmes réels, α est très petit, (24) devient :

$$\delta = 2\pi n\alpha$$

$$\alpha = \frac{\delta}{2\pi n} \quad (25)$$

2. Mouvement forcé

Le mouvement forcé est causé par n'importe quelle force ou couple (en cas de rotation) extérieure. Il peut être aussi une masse non équilibrée du système lui-même, c'est ce qu'on appelle un balourd.

La solution générale de l'équation (1) est égale à la somme de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Sauf en cas d'étude de l'influence du régime transitoire (démarrage), on ne s'intéresse généralement qu'au régime permanent ; solution particulière de l'équation (1). En effet, le mouvement transitoire disparait après un certain temps.

Considérons, une excitation extérieure harmonique de la forme :

$$F(t) = F \sin \Omega t \qquad (26)$$

Où F est l'amplitude de la force d'excitation et Ω la fréquence de la force d'excitation.

L'équation du mouvement (1) s'écrit dans ce cas :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \Omega t \qquad (27)$$

La solution en régime permanent doit être sous la forme :

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \phi) \qquad (28)$$

Où X est l'amplitude de la réponse à l'excitation et ϕ est le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

En reportant (28) dans (27):

$$[c\Omega \cos \phi - (k - m\Omega^2) \sin \phi]X \cos \Omega t + [(k - m\Omega^2)X \cos \phi + c\Omega\, X \sin \phi - F]\ \sin \Omega t = 0 \qquad (29)$$

(29) est de la forme :

$$f_1(X, \phi) \cos \Omega t + f_2(X, \phi)\ \sin \Omega t = 0$$

Pour que cette équation soit valable quelque soit t, il faut que les coefficients constant dans le temps $f_1$et $f_2$soient nuls, d'où :

$$\begin{cases} c\Omega \cos \phi - (k - m\Omega^2) \sin \phi = 0 \\ (k - m\Omega^2)X \cos \phi + c\Omega\, X \sin \phi - F = 0 \end{cases} \qquad (29a)$$

La résolution de ce système d'équations nous donne :

$$\tan\phi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

$$\tan\phi = \frac{2\alpha(\frac{\Omega}{\omega})}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2} \qquad (30)$$

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}$$

En considérant X_{st}, le déplacement statique de la masse sous la force F :

$$X_{st} = \frac{F}{k}$$

On obtient : $$X = \frac{X_{st}}{\sqrt{[1-(\Omega/\omega)^2]^2 + \left[2\alpha(\frac{\Omega}{\omega})\right]^2}} \qquad (31)$$

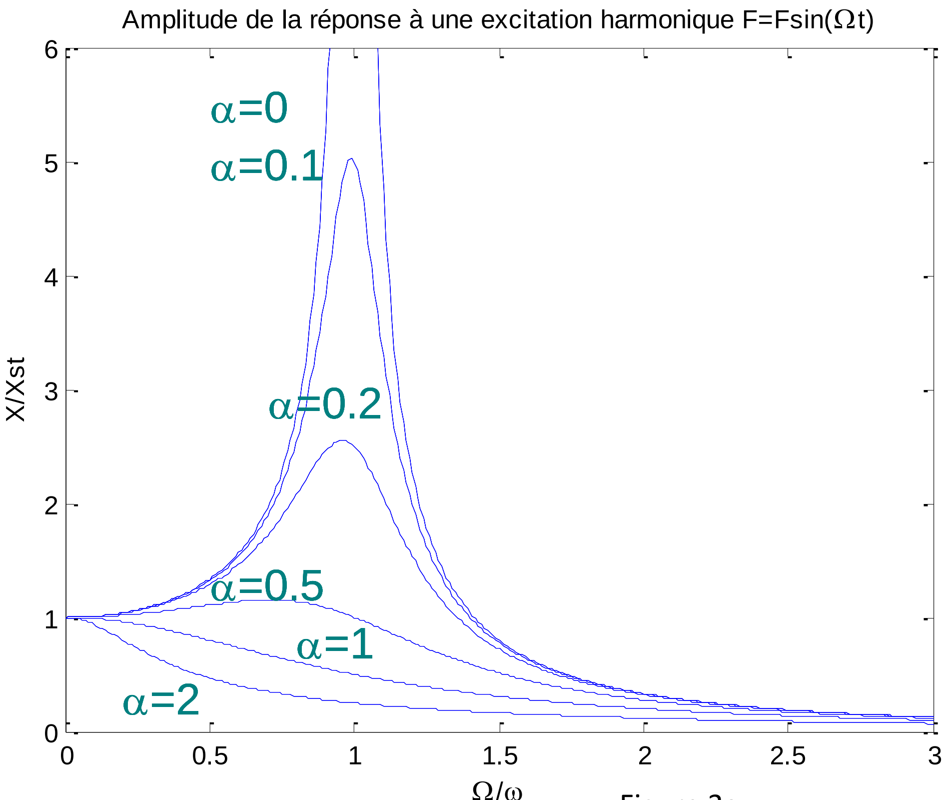

Figure 3a

La Figure (3a) montre l'amplitude des vibrations décrite par l'équation (31) d'un système à 1ddl avec amortissement visqueux soumis à un régime harmonique permanent.

Cette amplitude est maximum pour :

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1-2\alpha^2} \qquad (32)$$

Correspondant à $$X = \frac{X_{st}}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (33)$$

Et $$\tan\phi = \frac{\sqrt{1-2\alpha^2}}{\alpha} \qquad (34)$$

Ce sont les caractéristiques de la résonnance d'amplitude. Pour les valeurs de $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$, le maximum de X correspond à Ω=0 ; force d'excitation constante.

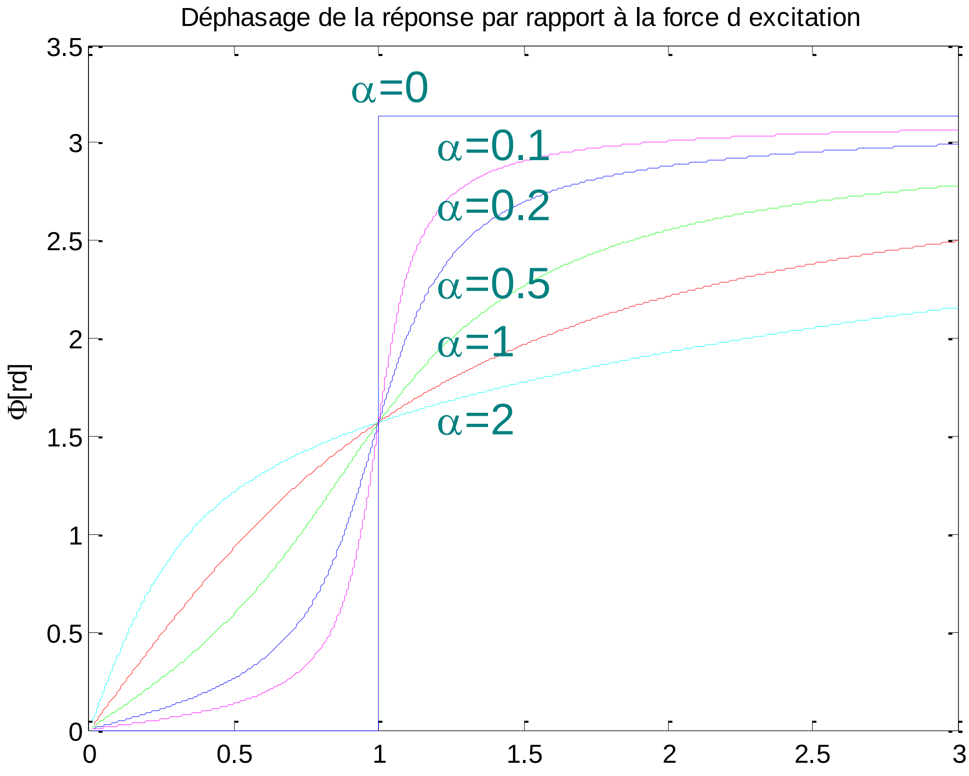

Figure 3b

Du côté de la phase ϕ, l'équation (30) montre que tan(ϕ) est infinie ; ϕ=π/2 et

$$X = \frac{X_{st}}{2\alpha} \qquad (35)$$

c'est la résonance en phase.

Dans les systèmes réels, l'amortissement est généralement faible, où les équations (32), (33) et (34) donnent :

$$\frac{\Omega}{\omega} = 1 \qquad X = \frac{X_{st}}{2\alpha} = QX_{st} \qquad \tan\phi = \frac{1}{\alpha}$$

où Q est le facteur de surtension

Dans ce cas, la valeur du déplacement correspondant à la résonance d'amplitude est confondue avec celle de la résonance en phase.

Effets de la résonance

Dans les systèmes faiblement amortis, les forces peuvent être importantes. Celle dans le ressort est :

$$F_r = kX_r = k\frac{X_{st}}{2\alpha} = \frac{F}{2\alpha} = QF$$

Comme α est faible, Q est très important et donc F_r. C'est pourquoi, il faut déterminer les résonances des structures.

Energie transmise et dissipée

L'énergie transmise par la force extérieure au système pendant une période de tamps est donnée par :

$$E_{F(t)} = \int_0^T F(t)\frac{dx}{dt}dt$$

F(t) est donnée par le second membre de (27) et x par (28). Donc,

$$E_{F(t)} = \pi XF\sin\phi$$

Et du système (29a), $F\sin\phi = c\Omega X$

D'où $$E_{F(t)} = \pi c\Omega X^2 \qquad (36)$$

C'est l'énergie fournie par la force extérieure. Si on calcule, l'énergie dissipée par l'amortisseur :

$$E_{amortisseur} = \int_0^T c\dot{x}\frac{dx}{dt}dt = -\pi c\Omega X^2 \qquad (37)$$

On peut conclure que l'énergie fournie par l'excitation extérieure sera complètement dissipée par l'amortisseur.

Largeur de bande

C'est l'intervalle (Ω_2-Ω_1) situé autour de la fréquence de résonance. L'amplitude X est la même pour ces deux fréquences et est égale à $\frac{X_r}{\sqrt{2}}$ (voir figure 4). En cas de faible amortissement, cette amplitude est égale à :

$$X\left(\frac{\Omega_1}{\omega}\right) = X\left(\frac{\Omega_2}{\omega}\right) = \frac{X_r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{X_{st}}{2\alpha} \qquad (38)$$

Après calculs, on trouve :

$$\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\omega} = 2\alpha \qquad (39)$$

Cette relation est très utilisée pour déterminer le facteur d'amortissement α. C a d, on mesure $(\Omega_2 - \Omega_1)$ puis avec (39), on calcul α.

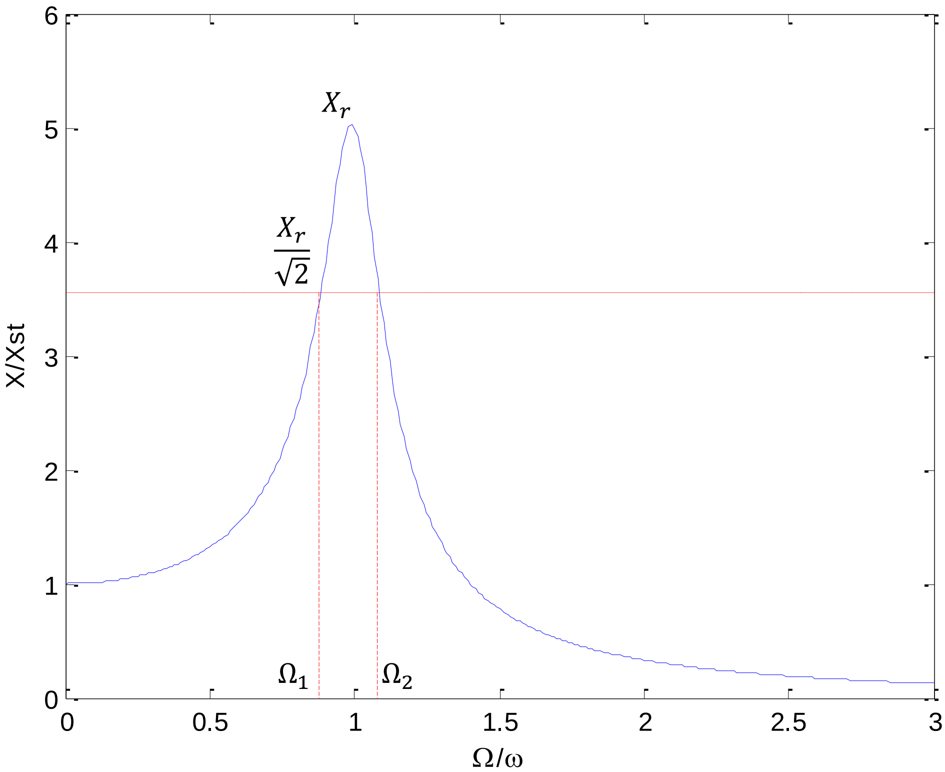

Figure 4

On remarque que :

$$20\log_{10}\frac{X(\Omega_1)}{X_r} = 20\log_{10}\frac{X(\Omega_2)}{X_r} = -3db \qquad (40)$$

D'où l'appellation « largeur de bande à -3db ».