Chapitre 2 : Systèmes à deux degrés de liberté

Les systèmes à deux degrés de liberté font partie des systèmes à N degrés de liberté. Leur petite taille facilite la compréhension de méthodes plus générales. On introduit dans ce chapitre la méthode modale utilisée dans le calcul des systèmes à grande taille.

Les deux degrés de liberté concernent les deux mouvements x_1 et x_2 des deux masses m_1 et m_2.

1. Systèmes non amortis

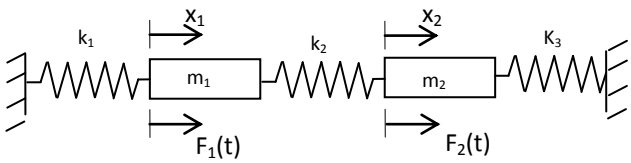


Figure II.1

Les deux masses se déplacent sans frottement sur le plan horizontal et soumises à des forces extérieures dans la direction du mouvement (Figure II.1). La résultante des forces appliquées à chaque masse est donnée par :

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 + F_2(t)$$

ou encore sous la forme :

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 &= F_2(t) \end{aligned} \qquad \text{(II.1)}$$

L'écriture matricielle des équations du mouvement des systèmes à 2 ddl ou plus facilite les calculs. Les équations (II.1) prennent la forme :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2)}$$

On remarque que les éléments extra-diagonaux de la matrice raideur sont non nuls. Ce sont les éléments de couplage. Ils présentent les raideurs liants les masses. Pour les éléments de la diagonale, la masse m_1 est directement attachée aux deux ressorts k_1 et k_2. La masse m_2 est attachée au seul ressort k_2.

Notons, $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ et $F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$ (II.3)

M : la matrice masse, K : la matrice raideur , *x* : vecteur des déplacements, et

F(t) Vecteur forces extérieures

Les équations (II.2) s'écrivent donc sous la forme :

$$M\ddot{x} + Kx = F(t) \qquad \text{(II.4)}$$

1. Mouvement libre

La force F(t)=0, l'équation (II.4) devient :

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

Pour faciliter les calculs, on suppose la solution est de la forme :

$$x = Xe^{j\omega t} \qquad \text{(II.6)}$$

Remplaçons (II.6) dans (II.5) :

$\dot{x} = j\omega Xe^{j\omega t}$ $\qquad$ $\ddot{x} = -\omega^2 Xe^{j\omega t}$

$$(-\omega^2 M + K)Xe^{j\omega t} = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

Comme $e^{j\omega t} \neq 0$

Le système (II.7) est de la forme :

$$AX=0 \qquad \text{(II.8)}$$

avec

$$A = -\omega^2 M + K \qquad \text{(II.9)}$$

A s'appelle la matrice dynamique.

Si A est inversible ; det(A)≠0, $A^{-1}AX = 0$ ⇒X=0 quelque soit t, solution triviale car on n'a aucun mouvement.

Donc, pour que X≠0, il faut que A soit singulière ou non inversible et donc det(A)=0.

On applique la condition de singularité à la matrice dynamique (II.9) :

$$\text{Det}(-\omega^2 M + K)=0 \qquad \text{(II.10)}$$

Remplaçons les matrices M et K données par (II.3) dans (II.10) :

$$\det\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2))\, \omega^2 + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_1 k_2 = 0$$

C'est une équation de degrés 2 pour une variable ω^2 et admet deux solutions ${\omega_1}^2$et ${\omega_2}^2$d'où :

$$\omega = \mp\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \omega = \mp\omega_2 \qquad \text{(II.11)}$$

ω_1, $\omega_1$sont **les fréquences propres** du système.

La matrice A est fonction de ω^2, les deux valeurs de ω^2 donnent 2 matrices A (II.9) et donc 2 vecteurs X (II.8).

$$\begin{aligned} (-{\omega_1}^2 M + K)X_1 = 0 \\ (-{\omega_2}^2 M + K)X_2 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.12)}$$

X_1 et X_2 sont **les formes modales, les formes propres ou les modes** qu'on notera par la suite $\Phi_1 et\ \Phi_2$. Ils sont déterminés à une constante multiplicative près.

La solution x(t) (II.6) est une combinaison linéaire de $X_1 e^{\pm j\omega_1 t}$ et $X_2 e^{\pm j\omega_2 t}$ de la forme :

$$x(t) = (\alpha_1 e^{j\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-j\omega_1 t})\mathrm{X}_1 + (\beta_1 e^{j\omega_2 t} + \beta_2 e^{-j\omega_2 t})\mathrm{X}_2 \qquad \text{(II.13)}$$

Les coefficients $\alpha_i$et β_i dépendent des conditions initiales.

$\alpha_i$et β_i sont complexes, la solution x(t) réelle. Il faut que la partie imaginaire de $(\alpha_1 e^{j\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-j\omega_1 t})$ et de $(\beta_1 e^{j\omega_2 t} + \beta_2 e^{-j\omega_2 t})$ soit nulle. Dans ces conditions, x(t) peut s'écrire :

$$x(t) = A_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1)\mathrm{X}_1 + A_2 sin(\omega_2 t + \varphi_2)\mathrm{X}_2 \qquad \text{(II.14)}$$

Les amplitudes A_i et les phases φ_i dépendent des conditions initiales.

L'équation (II.13) montre que chacune des 2 masses oscille avec les fréquences ω_1 et ω_2.

<u>Exemple</u>

Soit le cas où $k_1 = k_2 = k_3 = k$ et $m_1 = 3m$, $m_2 = m$

$$M = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2k - 3m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 2k - 3m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 3m^2\omega^4 - 8mk\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Dont les solutions sont :

$${\omega_1}^2 = 0.4514\frac{k}{m}, \omega_1 = 0.6718\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega_2{}^2 = 2.2152\frac{k}{m}$, $\omega_2 = 1.488\sqrt{\frac{k}{m}}$

L'équation (II.8) s'écrit pour $\omega_1{}^2$:

$$A(\omega_1{}^2)X_1 = A(\omega_1{}^2)\Phi_1 = k\begin{bmatrix} 0.6458 & -1 \\ -1 & 1.5486 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Φ est déterminé à une constante près, donc si on prend par exemple $x_1^1 = 1$ on trouve x_2^1=0.6458 et $\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6458 \end{bmatrix}$

Même calcul de X pour $\omega_1{}^2$;

$$A(\omega_2{}^2)X_2 = A(\omega_2{}^2)\Phi_2 = k\begin{bmatrix} -4.6456 & -1 \\ -1 & -0.2152 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour x_1^2=1, x_2^2=-4.6456 et $\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4.6456 \end{bmatrix}$

Et la solution (II.14) sera,

$$x(t) = A_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0.6458 \end{bmatrix} + A_2 sin(\omega_2 t + \varphi_2)\begin{bmatrix} 1 \\ -4.6456 \end{bmatrix}$$

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \text{ et } \dot{x}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix}$$

Pour généraliser la solution pour tous les systèmes à 2ddl, on considère les 2 modes sous la forme : $\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ C_1 \end{bmatrix}$, $\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ C_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_{10} = A_1 sin\,\varphi_1 + A_2 sin\,\varphi_2 \\ x_{20} = C_1\,A_1 sin\,\varphi_1 - C_2\,A_2 sin\,\varphi_2 \\ \dot{x}_{10} = A_1\omega_1 cos\,\varphi_1 + A_2\omega_2 cos\,\varphi_2 \\ \dot{x}_{20} = C_1\,A_1\omega_1 cos\,\varphi_1 - C_2\,A_2\,\omega_2 cos\,\varphi_2 \end{cases} \qquad \text{(ex-1)}$$

Dans ce système de 4 équations, on cherche les 4 inconnues : A_1, A_2, φ_1, φ_2

les deux premières équations de (ex-1), donnent les A_i en fonction des φ_i :

$$A_1 = \frac{1}{\sin\varphi_1}\frac{C_2\,x_{10} - x_{20}}{C_2 - C_1} \qquad \text{(ex-2)}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sin\varphi_2}\frac{x_{20} - C_1\,x_{10}}{C_2 - C_1} \qquad \text{(ex-3)}$$

Qu'on remplace dans les 2 dernières équations (ex-1) avec (ex-2) et (ex-3), on trouve :

$$\tan\varphi_1 = \omega_2 \frac{x_{20}-C_1\,x_{10}}{\dot{x}_{20}-C_1\dot{x}_{10}} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1 = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\omega_2 \frac{x_{20}-C_1\,x_{10}}{\dot{x}_{20}-C_1\dot{x}_{10}}\right) \\ ou \\ \operatorname{atan}\left(\omega_2 \frac{x_{20}-C_1\,x_{10}}{\dot{x}_{20}-C_1\dot{x}_{10}}\right)+\pi \end{cases} \qquad \text{(ex-5)}$$

De (ex-2), on a sign(sin φ_1)= sign($\frac{C_2\,x_{10}-x_{20}}{C_2-C_1}$) car $A_1 \geq 0$; donc on a une solution de (ex-5)

$$\tan\varphi_2 = \omega_1 \frac{x_{20}-C_2\,x_{10}}{\dot{x}_{20}-C_2\dot{x}_{10}} \qquad \Longrightarrow \varphi_2 = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\omega_1 \frac{x_{20}-C_2\,x_{10}}{\dot{x}_{20}-C_2\dot{x}_{10}}\right) \\ ou \\ \operatorname{atan}\left(\omega_1 \frac{x_{20}-C_2\,x_{10}}{\dot{x}_{20}-C_2\dot{x}_{10}}\right)+\pi \end{cases} \qquad \text{(ex-6)}$$

et sign(sin φ_2)= sign($\frac{x_{20}-C_1\,x_{10}}{C_2-C_1}$)

prenons par exemple : $x_{10} = x_{10}$, x_{20}=0, $\dot{x}_{10}$=0, $\dot{x}_{20} = 0$

on trouve $\varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, sign(φ_1)=sign($\frac{C_2\,x_{10}-x_{20}}{C_2-C_1}$)=sgn($\frac{-4.6456\,x_{10}}{-4.6456-0.6458}$) $= sign(\,x_{10})$

donc si x_{10}>0 $\varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$, sinon $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

et (ex-2) donne $A_1 = \frac{-4.6456\,x_{10}}{-4.6456-0.6458}$=0.8779 x_{10}

de (ex-6) $\varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$, sign(φ_2)=sign($\frac{x_{20}-C_1\,x_{10}}{C_2-C_1}$)= $sign(\,x_{10})$

et (ex-3) donne $\frac{-0.6458\,x_{10}}{-4.6456-0.6458}$=0.1220 x_{10}

et enfin : $x(t) = 0.8779\,x_{10} sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0.6458\end{bmatrix} + 0.1220\,x_{10} sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\-4.6456\end{bmatrix}$

<u>Remarque</u>

Dans le cas d'un mouvement libre, pour que les masses vibrent seulement avec la première fréquence, il faut que $A_2 = 0$; c.a.d., $\frac{x_{20}}{x_{10}} = C_1$.

Elles vibrent avec la deuxième fréquence, si $A_1 = 0$; $\frac{x_{20}}{x_{10}} = C_2$

Quelques propriétés

$$\begin{aligned} \Phi_1^t M \Phi_2 &= 0 \\ \Phi_1^t K \Phi_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.15)}$$

On dit que les modes sont orthogonaux par rapport aux matrices M et K.

$$\begin{aligned} \Phi_1^t M \Phi_1 \; et \; \Phi_2^t M \Phi_2 &= masses\ modales \\ \Phi_1^t K \Phi_1 \; et \; \Phi_2^t K \Phi_2 &= raideurs\ modales \end{aligned} \qquad \text{(II.16)}$$

2. Mouvement forcé

Excitation harmonique

Le second membre du système (II.4) est une force à deux composantes (une pour chaque masse) de la forme :

F(t)= $\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$

On peut utiliser la notation complexe :

$$F(t)= e^{j\Omega t}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.17)}$$

Avec F_i nombre complexe, contient la phase i de F(t) et indépendant de t.

La solution de (II.4) est la somme de la solution du système sans second membre (elle est transitoire car il y a toujours présence de l'amortissement dans les systèmes réels) et une solution particulière du système avec second membre (solution permanente).

La solution particulière peut s'écrire sous forme complexe :

$$x(t) = e^{i\Omega t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.18)}$$

Avec x_i complexe contenant les phases de x(t)

Remplaçons (II.18) dans (II.4):

$$[K - \Omega^2 M]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$AX = F \qquad \text{(II.19)}$$

$$X = A^{-1}F \qquad \text{(II.20)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} -\Omega^2 m_2 + k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & -\Omega^2 m_1 + (k_1 + k_2) \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = m_1 m_2 \Omega^4 - (m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2))\,\Omega^2 + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_1 k_2$$

det(A)≠0 quand $\Omega \neq \omega_1 ou\ \omega_2$

$$X = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} -\Omega^2 m_2 + k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & -\Omega^2 m_1 + (k_1 + k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \frac{e^{j\Omega t}}{\det(A)}\begin{bmatrix} (-\Omega^2 m_2 + k_2 + k_3)F_1 + k_2 F_2 \\ k_2 F_1 + (-\Omega^2 m_1 + (k_1 + k_2))F_2 \end{bmatrix}$$

Prenons les mêmes valeurs de l'exemple de la section précédente avec F=$\begin{bmatrix} F_1 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$.

La première composante est la partie imaginaire de $F_1 e^{i\Omega t}$.

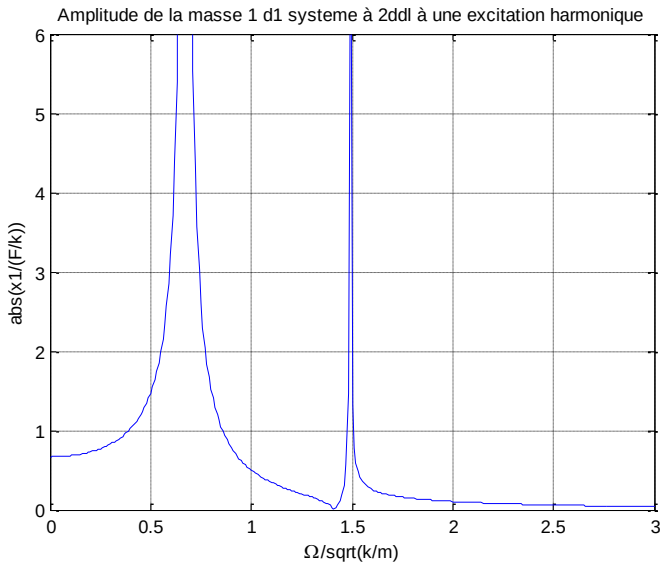
La réponse sera donc Im(X(t)).

$$X(t) = Im\left(\frac{e^{j\Omega t}}{\det(A)}\begin{bmatrix} (-\Omega^2 m_2 + k_2 + k_3)F_1 + k_2 F_2 \\ k_2 F_1 + \left(-\Omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)\right)F_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{(-\Omega^2 m + 2k)}{3m^2\Omega^4 - 8mk\Omega^2 + 3k^2} \\ \dfrac{k}{3m^2\Omega^4 - 8mk\Omega^2 + 3k^2} \end{bmatrix} F_1 \sin(\Omega t)$$

$$X(t)/\left(\frac{F_1}{k}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}\right)^2 + 2\right)}{3\left(\frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}\right)^4 - 8\left(\frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}\right)^2 + 3} \\ \dfrac{1}{3\left(\frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}\right)^4 - 8\left(\frac{\Omega}{\sqrt{k/m}}\right)^2 + 3} \end{bmatrix} \sin(\Omega t) \quad \text{(II.21)}$$

On remarque que les fréquences Ω qui annulent le dénominateur sont celle données par l'équation (II.10) et se sont les fréquences propres du système. Donc quand la fréquence de la force d'excitation harmonique est égale ou au voisinage de l'une des fréquences propres du système, l'amplitude des vibrations est infinie. C'est le problème des systèmes non amortis. La figure (II.1) montre l'amplitude de la réponse en fonction de la fréquence d'excitation.


Amplitude de la masse 1 d1 systeme à 2ddl à une excitation harmonique
abs(x1/(F/k))
Ω/sqrt(k/m)
0
1
2
3
4
5
6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

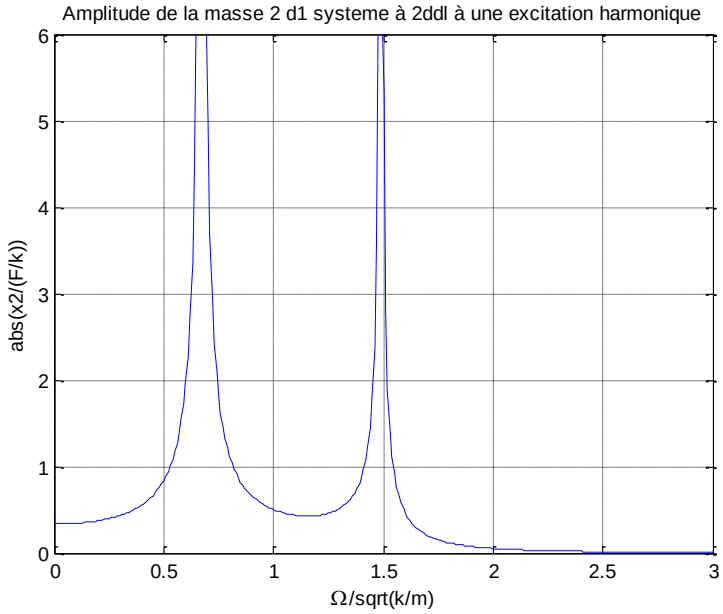

Amplitude de la masse 2 d1 systeme à 2ddl à une excitation harmonique
abs(x2/(F/k))
Ω/sqrt(k/m)
0
1
2
3
4
5
6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Figure (II.1)