Chapitre 2 : Modélisation géométrique

Dans le premier chapitre, on a vu une variété de systèmes mécaniques articulés. Les robots manipulateurs à architectures séries qui présentent la plupart des robots industriels, les manipulateurs à architectures parallèles exemple la table de Stewart et les robots mobiles sur roues ou à pattes.
Les actionneurs animent le SMA et lui donnent une configuration instantanée dans l'espace.

Cette configuration est caractérisée par un vecteur $q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{Bmatrix}$, où q_i sont les coordonnées articulaires commandées par les actionneurs ; n est égal aux nombre d'actionneurs.
Chaque configuration donne à la pince ou l'effecteur une position et une orientation caractérisée par un vecteur $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix}$, m≤6.

La modélisation géométrique du système mécanique articulé consiste à établir une relation entre les déplacements articulaires q et les coordonnées spatiales x sous la forme :

$$x = f(q)$$

Pour calculer et étudier cette relation, on a besoin de quelques outils mathématiques de repérage d'objets dans l'espace.

<u>Rappels mathématiques</u>

1. Coordonnées d'un point dans deux repères

Les coordonnées de M dans le repère $R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)$ sont : $M = \begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{Bmatrix}$

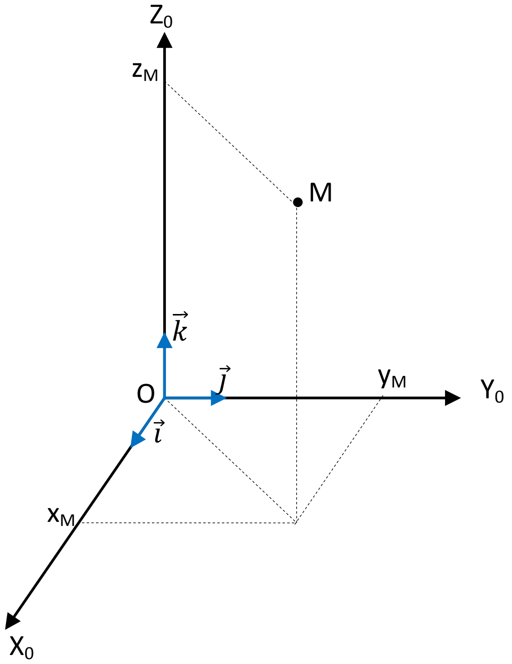

Figure 1

Le vecteur s'écrit dans le repère R_0 :

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k} \qquad (1)$$

Le même point M dans sa même position, est repéré par un deuxième repère $R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$ de vecteurs unitaires $\begin{Bmatrix} \vec{\imath_1} \\ \vec{\jmath_1} \\ \vec{k_1} \end{Bmatrix}$.

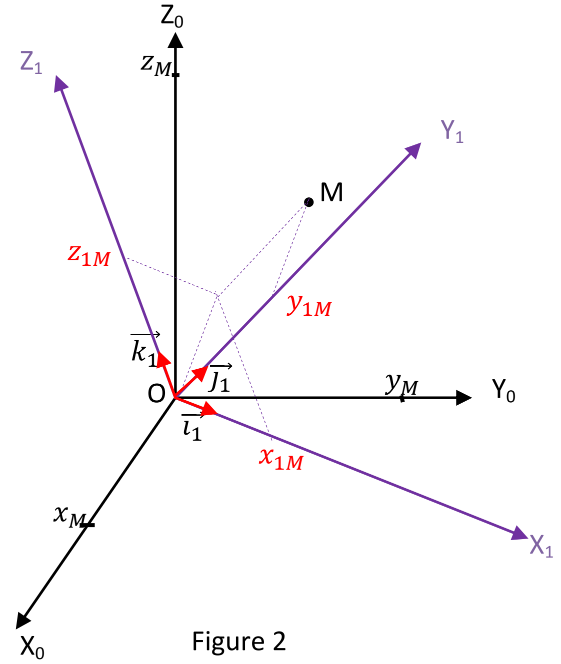

Figure 2

Le même vecteur $\overrightarrow{OM}$ de l'équation (1) s'écrit dans le repère R_1:

$$\overrightarrow{OM} = x_{1M}\vec{\imath_1} + y_{1M}\vec{\jmath_1} + z_{1M}\vec{k_1} \qquad (2)$$

Si on considère que R_0 est le repère absolu et R_1, le repère local. On cherche à calculer les coordonnées du point M dans le repère absolu en fonction de ses coordonnées dans le repère local R1.

De (1) et (2) on a :

$$x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k} = x_{1M}\vec{\imath_1} + y_{1M}\vec{\jmath_1} + z_{1M}\vec{k_1}$$

Et avec la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1M} & y_{1M} & z_{1M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\imath_1} \\ \vec{\jmath_1} \\ \vec{k_1} \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Les vecteurs unitaires de R_1 s'écrivent dans R_0 sous la forme :

$$\vec{\imath_1} = A_{11}\vec{\imath} + A_{21}\vec{\jmath} + A_{31}\vec{k}$$
$$\vec{\jmath_1} = A_{12}\vec{\imath} + A_{22}\vec{\jmath} + A_{32}\vec{k}$$
$$\vec{k_1} = A_{13}\vec{\imath} + A_{23}\vec{\jmath} + A_{33}\vec{k}$$

Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{j_1} \\ \overrightarrow{k_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

Si on remplace l'expression des vecteurs unitaires de R_1 de (4) dans celles de (3)

$$[x_M \quad y_M \quad z_M] \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = [x_{1M} \quad y_{1M} \quad z_{1M}] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$[x_M \quad y_M \quad z_M] = [x_{1M} \quad y_{1M} \quad z_{1M}] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Sachant que :

$$(A\,B)' = B'A'$$

avec (') désigne la transposée d'un vecteur ou d'une matrice.

L'équation (5) devient donc :

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1M} \\ y_{1M} \\ z_{1M} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

L'équation (6) donne les coordonnées du point M dans le repère absolu, en fonction de ses coordonnées dans le repère local.

La matrice,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

s'appelle la matrice de transformation ou de passage de R_1 à R_0.