La matrice,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

A : s'appelle la matrice de transformation ou de passage de R_0 à R_1.

$$R_0 \overset{A}{\rightarrow} R_1$$

C.a.d., connaissant les coordonnées d'un point dans le repère R_1, on peut les calculer dans R_0 par la relation (6).

<u>Propriétés de la matrice de transformation</u>

$$A^T = A^{-1} \qquad (8)$$

D'où : $AA^T = I$ (la matrice identité)

det A=1

Elle est dite orthogonale, c'est aussi une matrice de rotation.

De la relation (4) , $\{\overrightarrow{e_1}\} = A^T \{\overrightarrow{e_0}\}$ donc

$$\{\overrightarrow{e_0}\} = A\,\{\overrightarrow{e_1}\} \qquad (9)$$

Transformations simples

Si le repère R_1 se déduit du repère R_0 par une rotation d'angle θ autour de l'axe X ou Y ou Z, la matrice de passage est simple. On la note par :

$$R_0 \xrightarrow{R(axe,\theta)} R_1$$

Rotation autour de l'axe X

$$R(\theta, X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & S\theta \end{bmatrix}$$

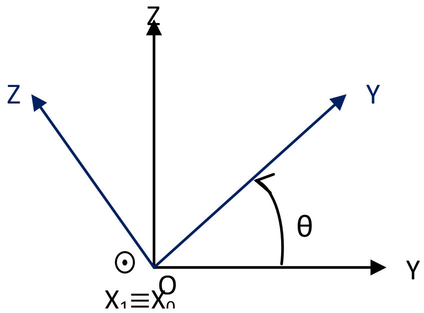


Figure 3 : Rotation autour de l'axe X

Rotation autour de l'axe Y

$$R(\theta, Y) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}$$

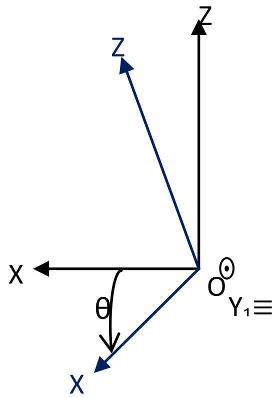


Figure 4 : Rotation autour de l'axe Y

Rotation autour de l'axe Z

$$R(\theta, Z) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

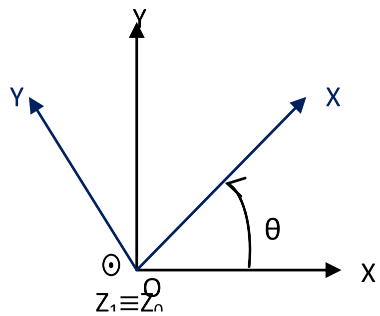


Figure 5 : Rotation autour de l'axe Z

Remarque

Dans ce qui suit, on note la matrice de passage de R_i à R*j* parA^{ij}.

$$R_i \xrightarrow{A^{ij}} R_j$$

Généralisation à la transformation entre plusieurs repères

La relation (9) peut être généralisée sous la forme :

$$\{\overrightarrow{e_i}\} = A^{ij}\,\{\overrightarrow{e_j}\} \qquad (10)$$

Si on suppose qu'on a trois repères tel que :

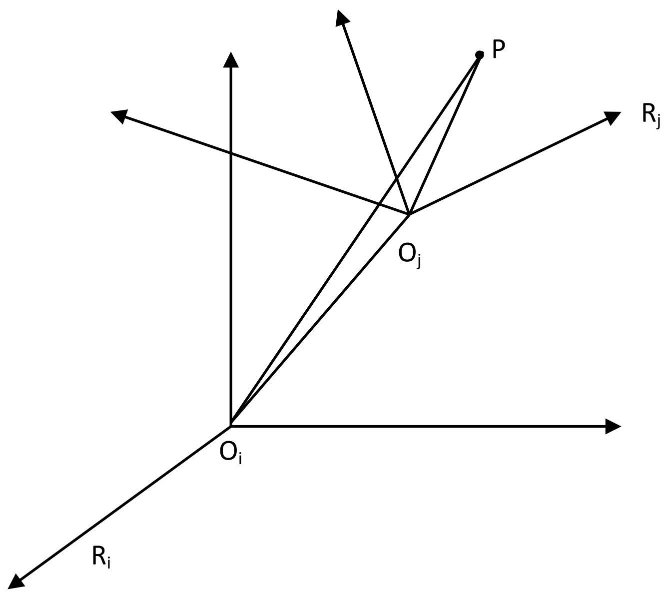
$$R_i \overset{A^{ij}}{\longrightarrow} R_j \overset{A^{jk}}{\longrightarrow} R_k$$

De (10) :

$\{\overrightarrow{e_i}\} = A^{ij}\,\{\overrightarrow{e_j}\}$ et $\{\overrightarrow{e_j}\} = A^{jk}\,\{\overrightarrow{e_k}\}$ d'où

$$\{\overrightarrow{e_i}\} = A^{ij}A^{jk}\,\{\overrightarrow{e_k}\} = A^{ik}\{\overrightarrow{e_k}\} \Rightarrow A^{ik} = A^{ij}A^{jk} \qquad (11)$$

1. Coordonnées d'un point dans deux repères quelconques



$$\overrightarrow{O_iP} = \overrightarrow{O_iO_j} + \overrightarrow{O_jP}$$

$$[x_i]\{\overrightarrow{e_i}\} = \left[L_{o_j}\right]\{\overrightarrow{e_i}\} + [x_j]\{\overrightarrow{e_j}\} = \left[L_{o_j}\right]\{\overrightarrow{e_i}\} + [x_j]A^{ji}\{\overrightarrow{e_i}\}$$

$$\{x_i\} = A^{ij}\,\{x_j\} + \left\{L_{o_j}\right\} \qquad (12)$$

Avec $[x_i]^T = \{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$

et $\left\{L_{o_j}\right\}$ les coordonnées de l'origine O_j dans R_i.

Matrice de transformation homogène

La relation (12) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{ij} & \{L_{o_j}\} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= T^{ij} \begin{Bmatrix} x_j \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Avec,

$\begin{Bmatrix} x_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{Bmatrix}$, les coordonnées homogènes du point P

Et

$$T^{ij} = \begin{bmatrix} A^{ij} & \{L_{o_j}\} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

T^{ij} est la matrice de transformation homogènes

Remarque : T^{ij} contient les parties rotation et translation entre les repères.