Angles d'Euler

Pour un repérage angulaire du repère R_j par rapport au repère R_i, on utilise les angles d'Euler qu'on appelle ψ, θ et φ.

On suppose qu'on a effectué trois rotations successives d'angles d'Euler à R_i. Le résultat sera le repère R_j.

Pour garder le repère Ri immobile, on suppose un repère (O,X, Y, Z) initialement confondu avec le repère $R_i(O,x,y,z)$. Le passage de R_i à R_j se fait par une rotation autour de Z d'angle ψ. A partir de cette position, on effectue une rotation autour de l'axe X d'angle θ et en fin une rotation d'angle φ autour de Z.

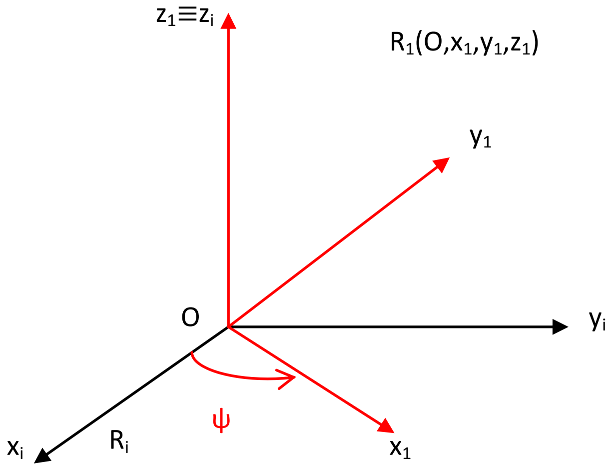

Figure 1 : Premier angle d'Euler ψ

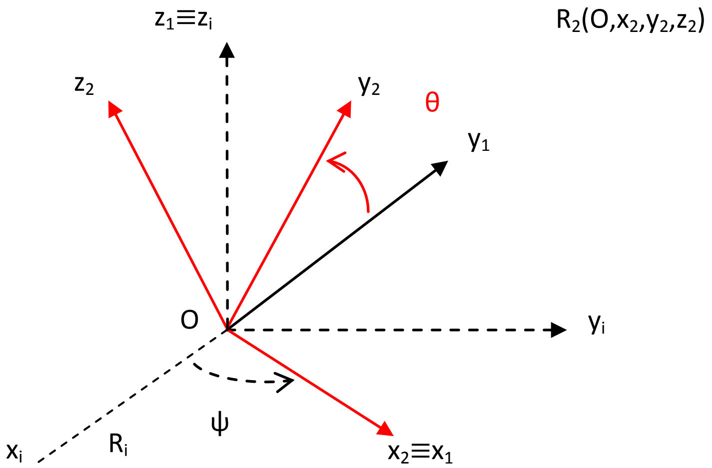

Figure 2 : Deuxième angle d'Euler θ

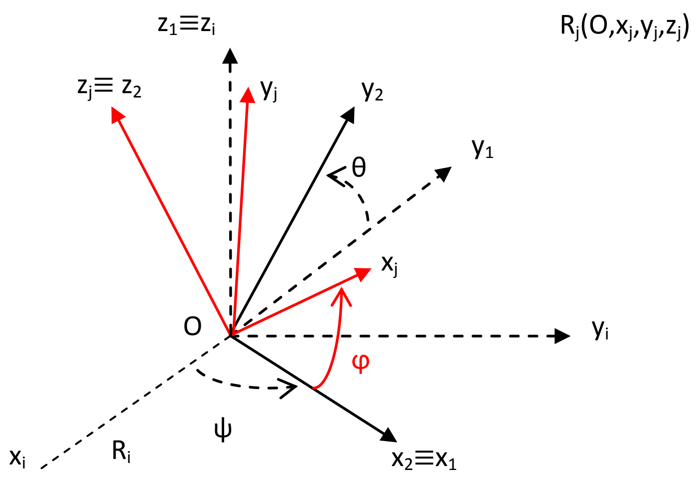

Figure 3 : Troisième angle d'Euler φ

$$R_i \xrightarrow{R(Z,\psi)} R_1 \xrightarrow{R(X,\theta)} R_2 \xrightarrow{R(Z,\varphi)} R_j$$

La matrice de transformation de la rotation $R(Z,\psi)$(figure 1) est (voir chapitre 2, transformations simples) :

$$A^{i1} = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation de la rotation $R(X,\theta)$(figure 2) est :

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & S\theta \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation de la rotation $R(Z,\varphi)$(figure 3) est :

$$A^{2j} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformation entre R_i et R_j sera donnée par la relation (11) du chapitre 2 :

$$A^{ij} = A^{i1}A^{12}A^{2j}$$

$$= \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & S\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{ij} = \begin{bmatrix} C\psi C\varphi - S\psi C\theta S\varphi & -C\psi S\varphi - S\psi C\theta C\varphi & S\psi S\theta \\ S\psi C\varphi + C\psi C\theta S\varphi & -S\psi S\varphi + C\psi C\theta C\varphi & -C\psi S\theta \\ S\theta S\varphi & S\theta C\varphi & C\theta \end{bmatrix}$$

A^{ij} donne la position angulaire de R_j par rapport à R_i.

Pour chercher la position angulaire de Ri par rapport à Rj, on fait un retour égale au dernier angle, puis au deuxième et enfin au premier et se trouve sur R_i :

$$R_j \xrightarrow{R(Z,-\varphi)} R_2 \xrightarrow{R(X,-\theta)} R_1 \xrightarrow{R(Z,-\psi)} R_i$$

De sorte que la matrice de transformation de R_j à R_i sera :

$$A^{ji} = \begin{bmatrix} C\psi C\varphi - S\psi C\theta S\varphi & S\psi C\varphi + C\psi C\theta S\varphi & S\theta S\varphi \\ -C\psi S\varphi - S\psi C\theta C\varphi & -S\psi S\varphi + C\psi C\theta C\varphi & S\theta C\varphi \\ S\psi S\theta & -C\psi S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

On remarque que :

$$A^{ji} = (A^{ij})^T$$

et c'est l'une des propriétés de la matrice de transformation vues au chapitre 2.