Chapitre 3 : La méthode modale appliquée aux systèmes à 2ddl

La méthode modale dans les systèmes à 2ddl sert à découpler les équations de sorte qu'on est deux équations à 1ddl chacune.

La méthode est basée sur le changement de variables :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

Où Φ_1 et Φ_2 sont les modes du système et q_1, $q_2$sont les nouvelles variables, appelées les variables modales.

Remplaçons les équations (III.1) dans l'équation du mouvement forcés (II.1) et prémultipliant par Φ^t :

$$\Phi^t M \Phi \ddot{q} + \Phi^t K \Phi q = \Phi^t F(t) \qquad \text{(III.2)}$$

Comme $\Phi^t M \Phi$est une matrice diagonale et même chose pour $\Phi^t K \Phi$, à cause des conditions d'orthogonalités (II.15).

(III.1) devient donc :

$$\begin{bmatrix} m_{1mod} & 0 \\ 0 & m_{2mod} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1mod} & 0 \\ 0 & k_{2mod} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1mod} \\ F_{2mod} \end{bmatrix}$$

Si on prend l'exemple du chapitre 2 :

$M = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$, $\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6458 \end{bmatrix}$, $\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4.6456 \end{bmatrix}$ et F=$\begin{bmatrix} F_1 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$

Donc (III.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0.6458 \\ 1 & -4.6456 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.6458 & -4.6456 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 0.6458 \\ 1 & -4.6456 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.6458 & -4.6456 \end{bmatrix} \\ &\quad = \begin{bmatrix} 1 & 0.6458 \\ 1 & -4.6456 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{bmatrix} 3.417m & 0 \\ 0 & 24.58m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.542k & 0 \\ 0 & 54.46k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \sin(\Omega t) \\ F_1 \sin(\Omega t) \end{bmatrix}$$

Les solutions de ce systèmes sont celles du système à 1ddl non amorti de variables indépendante q_1 et q_2.

$$q_1 = \frac{F_1 \sin(\Omega t)}{1.542k - 3.417m\Omega^2}$$

$$q_2 = \frac{F_1 \sin{(\Omega t)}}{54.46k - 24.58m\Omega^2}$$

Utilisons les équations (III.1) pour calculer les variables x :

$$x_1(t) = q_1 + q_2$$

$$x_2(t) = 0.6458q_1 - 4.646q_2$$

On retrouve les mêmes valeurs données par (II.21).