Chapitre 4 : Systèmes à 2ddl amortis

L'amortissement dans les systèmes réels existe. On le modélise dans ce qui suit par l'amortissement visqueux. Les équations différentielles du mouvement sont déduites des théorèmes généraux de la mécanique ou des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Avec L : le Lagrangien

R : est la fonction de dissipation. Dans ce cas, la dissipation est due à l'amortissement visqueux et a la forme :

$$R \approx \frac{1}{2} c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$$

où C est la matrice d'amortissement et F le vecteur forces extérieures.

1. Mouvement libre

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \qquad (1)$$

La solution est de la forme :

$$x = Xe^{rt} \qquad (2)$$

Remplaçons (2) dans (1) :

$$\Delta(r)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

La solution non triviale exige que le déterminant de $\Delta(r)$soit nul.

$$|\Delta(r)| = 0$$

Ce déterminant est un polynôme de degrés 4 sous la forme :

$$ar^4 + br^3 + cr^2 + dr + e = 0 \qquad (3)$$

Les coefficients de (3) sont réels et donc les racines sont réelles ou complexes conjuguées.

$$r_1 = -\alpha_1 + j\beta_1$$

$$r_2 = -\alpha_1 - \ j\beta_1$$

$$r_3 = -\alpha_2 + \ j\beta_2$$

$$r_4 = -\alpha_2 - \ j\beta_2$$

Les modes sont calculés pour chaque racine par (3) ; soit :

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ mod1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ mod2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur x est donc :

$$x_1(t) = e^{-\alpha_1 t}(A_1 \cos(\beta_1 t) + B_1 \sin(\beta_1 t)) + e^{-\alpha_2 t}(A_2 \cos(\beta_2 t) + B_2 \sin(\beta_2 t))$$

et $x_2(t)$, est donnée par :

$$x_2(t) = mode1\ e^{-\alpha_1 t}(A_1 \cos(\beta_1 t) + B_1 \sin(\beta_1 t)) + mode2\ e^{-\alpha_2 t}(A_2 \cos(\beta_2 t) + B_2 \sin(\beta_2 t))$$