Paramétrage de Denavit & Hartenberg

Pour que les matrices de passage T aient toutes la même forme littérale, on utilise le paramétrage de Denavit & Hartenberg. Il a été établit par ces deux derniers dans les années 50 puis modifié par W.Khalil sous le nom : Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié.

1. Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiée

Le repère R_i (O_i, x_i,y_i,z_i) est fixé sur le solide S_i, il est défini comme suit :

z_i : axe de la liaison S_i/S_{i-1}
x_i : perpendiculaire commune entre z_i et z_{i+1}
$y_i=z_i \wedge x_i$

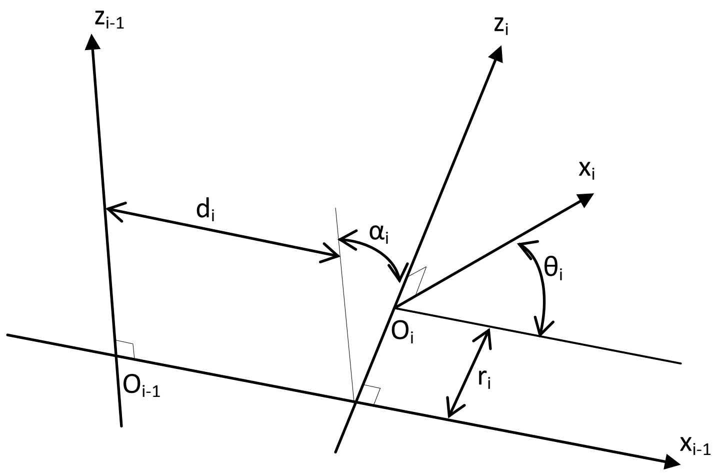

Figure 1 : Paramétrage DH modifié

DH utilise deux groupes de paramètres (figure 1) :

Paramètres de location de l'axe z_j dans S_{j-1} ;

- αi=angle (zi-1, zi) mesuré autour de x_{i-1}
- d_i= distance (z_{i-1}, z_i) mesuré suivant x_{i-1}

Paramètres de mouvement (rotation et/ou translation) de S_j/S_{j-1}

- θ_i : angle (x_{i-1}, x_i) mesuré autour de z_i
- r_i : distance (x_{i-1}, x_i) mesuré suivant z_i

De R_{i-1} on va vers R_i par les transformations suivantes :

$$R_{i-1} \xrightarrow{R(X,\alpha_i)\times T(X,d_i)\times R(Z,\theta_i)\times T(Z,r_i)} R_i$$

1. R_{i-1} tourne autour de son axe x par un angle α_i
2. il subit une translation de longueur d_i le long de x

3. une rotation autour de Z d'angle θ_i
4. une translation le long de Z d'une longueur r_i

(1)

Le paramètre articulaire q_i est égal à :

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{en cas de rotation} \\ r_i & \text{en cas de translation} \end{cases}$$

On utilise la variable σ_i pour distinguer entre la rotation et la translation :

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{en cas de rotation} \\ 1 & \text{en cas de translation} \end{cases}$$

2. Matrice de passage homogène DH

De la relation (1), on peut calculer la matrice de passage DH.

$$T^{i-1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & d_i \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{i-1,i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & d_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -r_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & r_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple

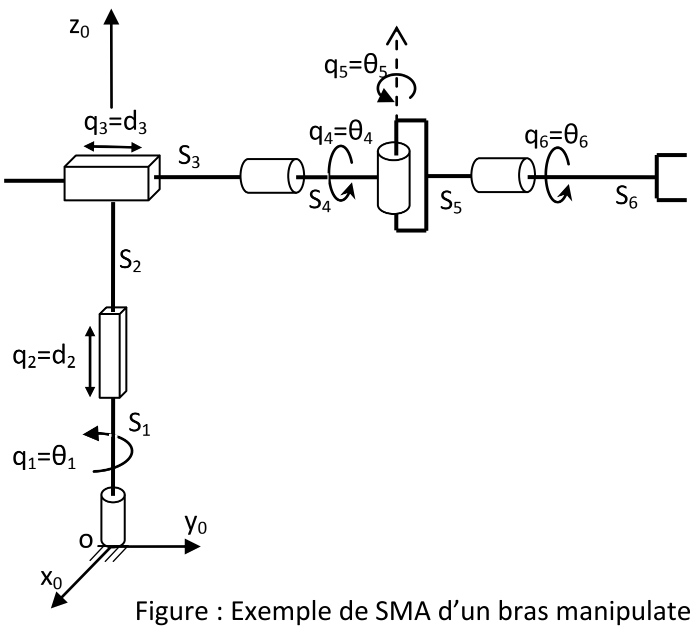

Figure : Exemple de SMA d'un bras manipulateur

L'application de l'algorithme DH ci-dessus permet de placer les différents repères. Quelques paramètres, sont de libre choix (comme ex : O_2, O_3).

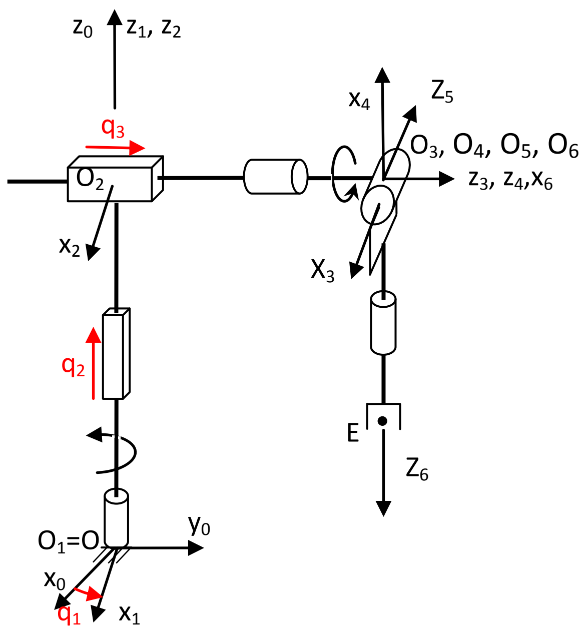

Figure 3 : Paramétrage DH modifié

Les coordonnées articulaires q_1, q_2 et q_3 sont les paramètres du porteur RPP. Les coordonnées du poignet sont q_4, q_5 et q_6.

3. Tableau des paramètres DH

Liaison	σ_i	α_i	d_i	θ_i	r_i	Matrice de passage DH
1	0	0	0	q_1	0	$T^{0,1} = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	1	0	0	0		$T^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	1	$-\pi/2$	0	0	q_3	$T^{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4	0	0	0	q_4	0	$T^{3,4}=\begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 & 0 \\ Sq_4 & Cq_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5	0	π/2	0	q_5	0	$T^{4,5}=\begin{bmatrix} Cq_5 & -Sq_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ Sq_5 & Cq_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6	0	-π/2	0	q_6	0	$T^{5,6}=\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_i & -C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tableau des paramètres DH

Les coordonnées du poignet (P) dans le repère R_0, sont déterminées par la matrice de passage $T^{0,3}$:

$$T^{0,3}=T^{0,1}.T^{1,2}.T^{2,3}=\begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{0,3}=\begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & -Sq_1 & -q_3Sq_1 \\ Sq_1 & 0 & Cq_1 & q_3Cq_1 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

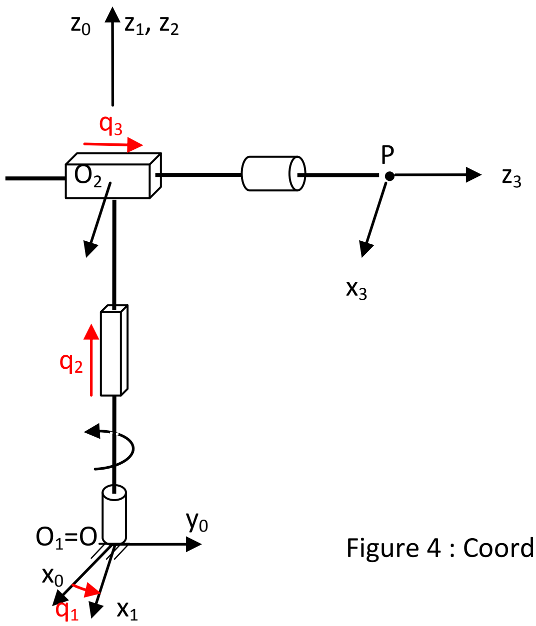

Figure 4 : Coordonnées du poignet

<u>Coordonnées du poignet</u>

Soit $\begin{Bmatrix} xp \\ yp \\ zp \\ 1 \end{Bmatrix}_{/R_3}$ les coordonnées du poignet P dans le repère R_3. Ses coordonnées dans R_0, sont :

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{Bmatrix}_{/R_0} = T^{0,3} \begin{Bmatrix} xp \\ yp \\ zp \\ 1 \end{Bmatrix}_{/R_3}$$

<u>Remarque</u> : Ces coordonnées permettent de tracer <u>l'espace de travail</u> du bras manipulateur.

<u>Coordonnées de l'effecteur</u>

Pour calculer les coordonnées de l'effecteur E (figure 3) dans le repère fixe R_0, il faut calculer la matrice globale :

$$T^{0,6} = \prod_{i=1}^{i=n} T^{i-1,i}$$

et la multiplier par le vecteur des coordonnées de E dans le dernier repère R_6.

$$\begin{Bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \\ 1 \end{Bmatrix}_{/R_0} = T^{0,6} \begin{Bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \\ 1 \end{Bmatrix}_{/R_6}$$

Si, l'origine du dernier repère coïncide avec E, dans ce cas, les coordonnées de E dans R_0, correspondent à la dernière colonne de la matrice de passage globale.

Le MGD

$$matrice\ de\ passage\ globle = \begin{bmatrix} [R] & [L] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$