Corrigé du TD sur chapitre systèmes à 2 degrés de liberté

Exo1

Démontrer que le déplacement des deux masses :

$$x(t) = (\alpha_1 e^{j\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-j\omega_1 t})X_1 + (\beta_1 e^{j\omega_2 t} + \beta_2 e^{-j\omega_2 t})X_2$$

α_i et β_i sont complexes

Peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1)X_1 + A_2 sin(\omega_2 t + \varphi_2)X_2$$

Réponse

La solution x(t) est réelle. Il faut que la partie imaginaire de $(\alpha_1 e^{j\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-j\omega_1 t})$ et de $(\beta_1 e^{j\omega_2 t} + \beta_2 e^{-j\omega_2 t})$ soit nulle. Dans ces conditions, x(t) peut s'écrire sous la forme ci-dessus.

Exo2

Calculer les amplitudes A_i et les phases φ_i pour les conditions initiales :

$x(o) = \begin{bmatrix} x_{01}^1 \\ x_{02}^1 \end{bmatrix}$ et $\dot{x}(o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rappels : X_1 et X_2 sont les modes propres (connus), Soit $X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$

et

ω_1, ω_2 sont les fréquences propres (connues).

Les modes et fréquences propres sont propres au système.

Il reste à déterminer A_1, A_2, φ_1, φ_2 qui *dépendent des conditions initiales*.

Les conditions initiales sont :

$x(o) = \begin{bmatrix} x_{01}^1 \\ x_{02}^1 \end{bmatrix}$ et $\dot{x}(o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Conditions initiales sur les déplacements :

$$x(0) = A_1 sin(\varphi_1)\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + A_2 sin(\varphi_2)\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01}^1 \\ x_{02}^1 \end{bmatrix}$$

Conditions initiales sur les vitesses :

$$\dot{x}(t) = A_1\omega_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1)\mathrm{X}_1 + A_2\omega_2 cos(\omega_2 t + \varphi_2)\mathrm{X}_2$$

$$\dot{x}(0) = A_1\omega_1 cos(\varphi_1)\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + A_2\omega_2 cos(\varphi_2)\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc le système à résoudre est :

$$A_1 sin(\varphi_1)\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + A_2 sin(\varphi_2)\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01}^1 \\ x_{02}^1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$A_1\omega_1 cos(\varphi_1)\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + A_2\omega_2 cos(\varphi_2)\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Les équations (2) s'écrivent:

$$A_1\omega_1 cos(\varphi_1)x_{11} + A_2\omega_2 cos(\varphi_2)x_{21} = 0$$

$$A_1\omega_1 cos(\varphi_1)x_{12} + A_2\omega_2 cos(\varphi_2)x_{22} = 0$$

De la première équation on tire :   (*)

$$A_2\omega_2 cos(\varphi_2) = -\frac{x_{11}}{x_{21}} A_1\omega_1 cos(\varphi_1)$$

Qu'on remplace dans la deuxième équation :

$$A_1\omega_1 cos(\varphi_1)x_{12} - \frac{x_{11}}{x_{21}} A_1\omega_1 cos(\varphi_1)x_{22} = 0$$

$$A_1\omega_1 cos(\varphi_1)\ \left(\frac{x_{12}}{x_{22}} - \frac{x_{11}}{x_{21}}\right) = 0$$

Comme les deux modes sont différents :

$\left(\frac{x_{12}}{x_{22}} - \frac{x_{11}}{x_{21}}\right)$ n'est jamais nulle.

A_1 n'est pas nulle aussi

Donc

$cos(\varphi_1)$=0 cela implique $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

Avec le même raisonnement (*) on trouve :

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Pour calculer les A_i, utilisons les conditions sur les déplacements (équations 1) avec $sin(\varphi_i) = 1$:

$$A_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01}^1 \\ x_{02}^1 \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$A_1 = \frac{x_{01}^1 x_{22} - x_{02}^1 x_{21}}{x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}}$$

$$A_2 = \frac{x_{01}^1 x_{12} - x_{02}^1 x_{11}}{x_{12} x_{21} - x_{11} x_{22}}$$