

COURS VIBRATIONS

Introduction au cours

L'étude des vibrations des systèmes industriels nous permet le contrôle des amplitudes des vibrations surtout lors des phénomènes de résonance.

Le but de ce cours est l'étude des phénomènes fondamentaux de la mécanique des vibrations et la mise en équation des systèmes et leur résolution.

On traite principalement des éléments discrets tels que ressort, masse, amortisseur.

Dans le chapitre 1, on étudie les systèmes, masse, ressort, amortisseur, à un degré de liberté. Le chapitre 2 concerne les systèmes à deux degrés puis N degrés de liberté. C'est le contenu de la première partie du cours.

Eléments de bibliographie

[1] M. Lalanne, J. Der Hagopian, P. Berthier, Mécanique des vibrations linéaires, Masson, 1986

[2] M. Lalanne, Guy Ferraris, Rotordynamics Prediction in engineering, John Wiley & Sons Ltd, 1990

Chapitre 1 : Vibrations des systèmes à un degré de liberté

Le modèle étudie le mouvement d'une masse (modélisant un corps rigide) par rapport à un support fixe, les deux sont liés par une raideur et un amortissement.

La masse possède un seul mouvement, translation ou rotation, donc elle a un degré de liberté (1ddl).

L'étude des systèmes à un degré de liberté permet de comprendre les phénomènes élémentaires en mécanique des vibrations.

Le système de la figure 1 présente les systèmes à un degré de liberté. Le déplacement x de la masse m est supposé dans un plan vertical et =mesuré à partir de la position d'équilibre.

Les forces appliquées sur la masse

1. Le ressort de raideur k produit sur la masse une force de rappel ($-kx$)
2. L'amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c produit sur la masse une force résistante au mouvement ($-c\dot{x}$).
3. La force extérieure, fonction du temps $F(t)$

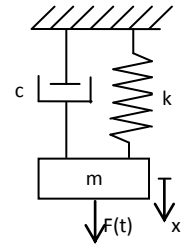


Figure 1

Remarque : Le signe (-) est dû à la force qui s'oppose au déplacement de la masse.

L'équation du mouvement de la masse

L'application du principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \text{forces agissantes sur la masse} = m\ddot{x} \quad (*)$$

donne l'équation différentielle traduisant le comportement du système :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

1. Mouvement libre

En absence de force extérieure, on dit que le système est en mouvement libre et l'équation (1) devient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

Les solutions de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants sont de la forme :

$$x = Ae^{rt} \quad (3)$$

En remplaçant (3) dans (2), on obtient :

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad (4)$$

C'est l'équation caractéristique du système. Elle n'est fonction que de ses paramètres (masse, raideur, amortissement).

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}} \right] \quad (5)$$

et la solution générale de l'équation différentielle (2) s'écrit :

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (6)$$

On introduit deux paramètres physiques mesurables :

la pulsation ou fréquence propre :

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (7)$$

et le facteur d'amortissement :

$$\alpha = \frac{c}{c_c} \quad (8)$$

c_c est l'amortissement critique. C'est la valeur de l'amortissement qui annule le discriminant de (4), cad :

$$\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m} = 0 \quad (9)$$

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (10)$$

En utilisant (7), l'amortissement critique devient :

$$c_c = 2m\omega \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (12)$$

$$c = 2\alpha m\omega \quad (13)$$

Les solutions de l'équation caractéristiques s'écrivent donc :

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (14)$$

On remarque que les solutions (14) de l'équation différentielle, dépendent du facteur d'amortissement α . Trois cas possibles : deux racines réelles, une racine double ou deux racines complexes.

1. $\alpha < 1$

L'amortissement est inférieur à la valeur critique. Les racines (14) sont complexes.

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm j\omega\sqrt{1-\alpha^2} \quad (15)$$

Et la solution (6) devient :

$$x = A_1 e^{(-\alpha\omega + j\omega\sqrt{1-\alpha^2})t} + A_2 e^{(-\alpha\omega - j\omega\sqrt{1-\alpha^2})t} \quad (16)$$

Comme x est réel, A_1 et A_2 sont des constantes complexes arbitraires.

et l'équation (16) peut s'écrire sous la forme :

$$x = A e^{-\alpha\omega t} \sin(\omega_a t + \varphi) \quad (17)$$

avec

$$\omega_a = \omega\sqrt{1-\alpha^2} \quad (18 a)$$

ω_a est la pulsation propre du système amorti. Les constantes A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales : $x_0 = x(0)$ et $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$.

$$A = \sqrt{\frac{(\dot{x}_0 + \alpha\omega_0 x_0)^2 + (x_0 \omega_a)^2}{\omega_a^2}} \quad (18 b)$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_a}{\dot{x}_0 + \alpha\omega_0 x_0} \quad (18 c)$$

Donc, dans le cas d'un amortissement inférieur à l'amortissement critique, la masse effectue des oscillations vibratoires amortis (voir figure 2).

2. $\alpha > 1$

Les solutions (14) sont dans ce cas deux racines réelles :

$$r_1 = -\alpha\omega + \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \quad , \quad r_2 = -\alpha\omega - \omega\sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (19)$$

La solution (6) s'écrit :

$$x = A_1 e^{(-\alpha\omega + \omega\sqrt{\alpha^2 - 1})t} + A_2 e^{(-\alpha\omega - \omega\sqrt{\alpha^2 - 1})t} \quad (20)$$

L'application des conditions initiales, nous donne les constantes A_1 et A_2 :

$$A_1 = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\omega x_0 + \dot{x}_0}{2\omega\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

$$A_2 = \frac{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})\omega x_0 - \dot{x}_0}{2\omega\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

Dans le cas d'un amortissement supérieur à l'amortissement critique (système sur-amorti), la masse n'effectue aucune oscillation (voir figure 2).

3. $\alpha=1$

Les solutions (14) donnent une racine double :

$$r_1 = r_2 = -\omega \quad (21)$$

Dans ce cas la solution de (2) est de la forme :

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega t} \quad (22)$$

L'application des conditions initiales $x_0 = x(0)$ et $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, donne les valeurs de A_1 et A_2 .

$$x = (x_0 + \omega x_0 t + \dot{x}_0 t)e^{-\omega t} \quad (22 \text{ a})$$

C'est la limite entre le mouvement oscillatoire et le mouvement non-oscillatoire.

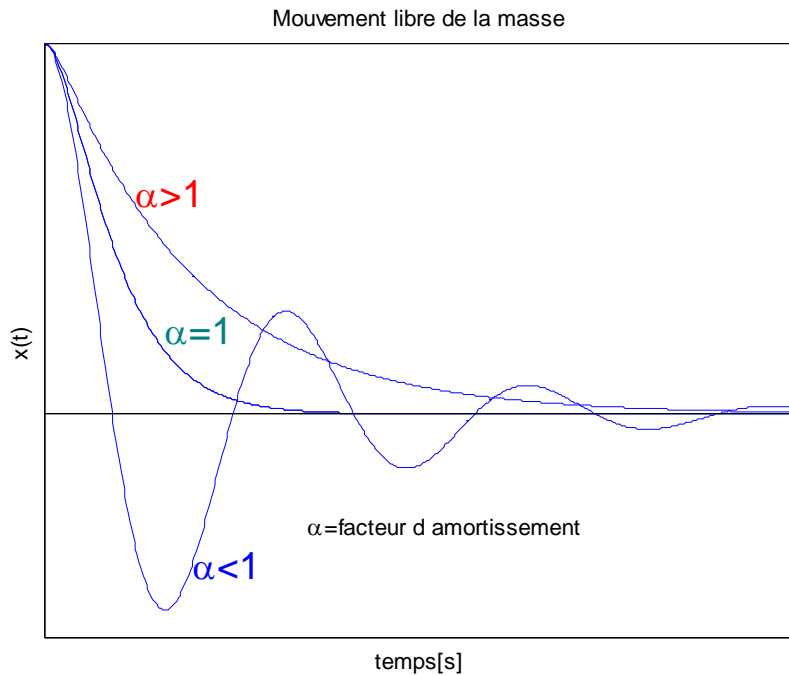


Figure 2

Détermination expérimentale du facteur d'amortissement

L'amortissement et le facteur d'amortissement sont difficiles à déterminer. On utilise des mesures dynamiques pour les déterminer.

La détermination expérimentale se fait par la mesure du décrément logarithmique. On calcule le logarithme népérien du rapport de deux amplitudes maximales $x(t)$ et $x(t+nT)$, lues sur la courbe du déplacement $x(t)$.

$$\text{Valeur de } \delta \text{ par mesure} \quad \delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Valeur de } \delta \text{ par calcul} \quad \delta &\approx \ln \frac{e^{-\alpha \omega t}}{e^{-\alpha \omega (t+nT)}} \\ \delta &= n\alpha \omega T \\ &= 2\pi n \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \end{aligned} \quad (24)$$

Dans les systèmes réels, α est très petit, (24) devient :

$$\begin{aligned} \delta &= 2\pi n \alpha \\ \alpha &= \frac{\delta}{2\pi n} \end{aligned} \quad (25)$$