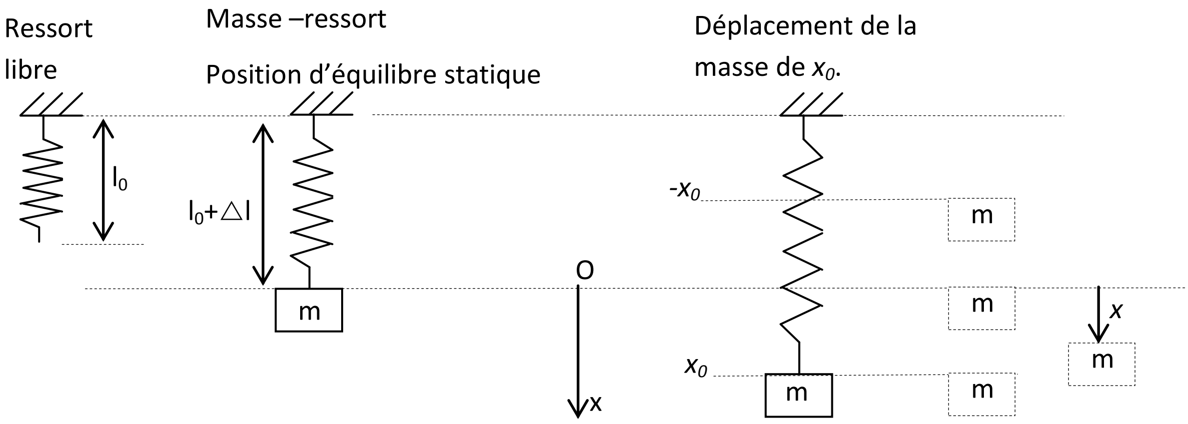
Mouvement vibratoire de la masse dans le système masse-ressort



On suppose que la masse du ressort est négligée devant la masse suspendue. A l'équilibre statique, la masse est soumisse à son propre poids et à la force de rappel du ressort :

$$\overrightarrow{Poids\ de\ la\ masse} + \overrightarrow{force\ de\ rappel\ du\ ressort} = \vec{0} \qquad (1)$$

Si on projette l'équation (1) sur l'axe (Ox), on obtient :

$$mg\text{-}k\,\Delta l=0 \qquad (2)$$

A partir de la position d'équilibre statique, on tire la masse (vers le bas ou vers le haut) d'une distance x_0 et on la lâche avec ou sans vitesse initiale. On appelle ce déplacement et cette vitesse les conditions initiales. On a donc emmagasinée une énergie potentielle dans le ressort :

$$Ep=\frac{1}{2}kx^2 \qquad (3)$$

En absence de frottement (ou d'autres pertes), cette énergie se conserve et se transforme en énergie cinétique de la masse :

$$Ec=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad (4)$$

Supposons qu'on a tiré la masse vers le bas (même raisonnement, pour le mouvement vers le haut). Le ressort tend à ramener la masse à sa position d'équilibre statique. Une fois arrivée à cette position, elle aura acquis une énergie cinétique maximale qui la pousse à continuer son mouvement jusqu'à l'annulation de sa vitesse. C'est la transformation de l'énergie cinétique de la masse, en énergie potentielle du ressort. Tant qu'il n'y a pas de pertes d'énergie, cette transformation d'énergie continue à l'infinie sous forme d'un mouvement aller-retour de la masse entre les positions $-x_0$ et $+x_0$. C'est le mouvement vibratoire.

1. *Equation d'équilibre dynamique à la position x* (x est calculé à partir de la position d'équilibre statique) :

$$mg + -k(x+\Delta l) = m\ddot{x} \qquad (5)$$

Avec l'équation (2), (5) devient :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (6)$$

2. De point de vue énergétique, la conservation de l'énergie totale en tout point entre $-x_0$ et x_0 s'écrit :

$$E = Ec + Ep = \text{cte} \qquad (7)$$

Ec et Ep sont données par (3) et (4) :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cte}$$

D'où :

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \qquad (8)$$

La vitesse n'est nulle que dans les positions extrêmes (-x0,+x0), donc :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$