Analyse Hilbertienne

Khaled Melkemi

1 Espaces de Hilbert

Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 1.1 *Un propduit scalaire sur E est une application notée de $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :*

C1 $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E$

C2 $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$

C3 $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad \forall x, y \in E$

C4 $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \quad \forall x, y, z \in E$

C5 $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

On appelle la structure $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

Exemples. Dans le plan $E = \mathbb{R}^2$, l'application $\langle x, y\rangle = x_1y_1+x_2y_2$ définie un produit scalaire euclidien,tandis que l'application $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ est le produit scalaire euclidien dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$. Plus généralement, on peut définir d'autres produits scalaires sur différents espaces :

1. L'application $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ définie un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$.
2. L'application $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ définie un produit scalaire sur $E = \mathbb{C}^n$.
3. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné non vide de $\mathbb{R}$. L'application

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

définie un produit scalaire sur $E = C([a, b])$: espace des fonctions continues à valeurs complexes.

Proposition 1.2 *On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz :* $\forall x, y \in E \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
2. *Identité du parallélogramme :* $\forall x, y \in E$ *on a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

3. *L'application* $\|\cdot\|$; $E \longrightarrow \mathbb{K}$, *définie par* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, *est une norme sur* E *(appelée norme hilbertienne).*

Démonstration.

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz : Cette inégalité est évidente pour $y = 0$. Supposons alors que $y \neq 0$ et, sans perte de généralité, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\|y\| = 1$:

$$\begin{aligned}
\|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\
&= \|x\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \overline{\overline{\lambda}\langle x, y\rangle}.
\end{aligned}$$

Si l'on prend $\lambda = \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$, on obtient :

$$0 \leq \|x\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 - 2|\langle x, y\rangle|^2,$$

Donc, en utilisant $\|y\| = 1$, on a

$$\|x\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 \geq 0$$

d'où

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|, \quad \forall x, y \in E, \quad \|y\| = 1.$$

Si $\|y\| \neq 1$, on pose $z = \frac{y}{\|y\|}$. On a alors $\|z\| = 1$ et $|\langle x, z\rangle| \leq \|x\|$. Donc,

$$\frac{1}{\|y\|}|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|$$

et par conséquent

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in E$$

2. Identité du parallélogramme : Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Par la somme des deux équations, on obtient l'identité :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

3. L'application $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vérifie, trivialement les deux premières conditions de la norme. Il suffit de montrer qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|^2 & = & \langle x+y, x+y\rangle \\ & = & \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \\ & \leq & \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|\|y\| \end{array}$$

   puisque $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc
$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2,$$
   ce qui montre que l'application $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme

Définition 1.3 *On dit que E est un espace de Hilbert s'il est un espace préhilbertien et complet pour la distance induite par la norme hilbertienne.*

2 Orthogonalité

Dans cette section, on présente une notion importante dans les espaces de Hilbert.

Définition 2.1 *Soit $x, y \in E$. Les deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$. On écrit alors $x \perp y$.*

Définition 2.2 *Soit $A \subset E$. L'orthogonal de A, noté $A^\perp$ est l'ensemble :*

$$A^\perp = \{x \in E \ \textit{ tel que } \langle x, a\rangle = 0, \ \forall a \in A\}.$$

Proposition 2.3 *L'orthogonal de tout sous ensemble A de E est un sous espace vectoriel de E.*

Démonstration.
Soient $x, y \in A^\perp$. Pour tout $a \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \langle \alpha x + \beta y, a\rangle & = & \alpha\langle x, a\rangle + \beta\langle y, a\rangle \\ & = & 0. \end{array}$$

Ce qui montre que $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

Un résultat important de l'orthogonalité est le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Théorème de Pythagore) *Soit $x, y \in E$. Si les vecteurs x et y sont orthogonaux alors on a*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Le cas inverse est généralement faux dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_2}.$$

Si l'on prend

$$x = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} y = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

alors on obtient $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, or que $\langle x, y\rangle = -2i \neq 0$.

Théorème 2.5 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Si la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité de parallélogramme alors l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie pae*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{1}$$

est un produit scalaire sur E et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Ce théorème se généralise dans le cas d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ avec une une formule adéquate du produit scalaire.

3 Théorème de projection

Théorème 3.1 *Soit E un espace de Hilbert et F un sous-ensemble fermé et convexe de E. Étant donné f dans E, il existe un élément unique $f^* \in F$ tel que*

$$\|f - f^*\| = \min_{v \in F} \|f - v\| \tag{2}$$

Démonstration. Posons $d = \inf\{\|f - v\|,\ v \in F\}$ la distance entre f et F. Si $d = 0$ alors $f \in F$ et donc $f = f^*$. On suppose que $d > 0$. On pose pour tout entier $n \geq 1$

$$A_n = \{x \in F,\ \text{tel que } \|f - v\| \geq d + \frac{1}{n}\}$$

Soit $u, v \in A_n$, on pose $x = u - f$ et $y = f - v$. En appliquant l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 + \|x - y\|^2 &\leq 2((d + \frac{1}{n})^2 + (d + \frac{1}{n})^2) \\ &\leq 4(d + \frac{1}{n})^2. \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 = \|u - f - f + v\|^2 &= 4\|f - \frac{u + v}{2}\|^2 \\ &\geq 4d^2, \end{aligned}$$

puisque F est convexe et donc $\frac{u+v}{2} \in F$. Donc on a :

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &\leq 4(d + \frac{1}{n})^2 - 4d^2 \\ &\leq 8\frac{d}{n} + \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Si l'on note δ_n le diamètre de A_n alors on déduit que $\delta_n \leq 8\frac{d}{n} + \frac{4}{n^2}$ et $\lim_n \delta_n = 0$. Par conséquent, on peut construire une suite $u_n \in A_n$ telle que

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq 8\frac{d}{n} + \frac{4}{n^2}$$

est une suite de Cauchy et donc convergente vers $f^* \in F$ (puisque F est fermé), et on a $d = \|f - f^*\|$.

On va maintenant montrer l'unicité de l'élément f^*. Soit f_1 et f_2 deux élément de F tels que : $\|f - f_1\| = \|f - f_2\| = d$. Comme l'ensemble F est convexe alors $\frac{f_1+f_2}{2} \in F$, et on a

$$\begin{aligned} d \leq \|f - \frac{f_1 + f_2}{2}\| &\leq \frac{1}{2}\|f - f_1 + f - f_2\| \\ &\leq \frac{1}{2}(d + d) = d. \end{aligned}$$

Donc $\|f - \dfrac{f_1 + f_2}{2}\| = d$

On applique l'identité du parallélogramme pour les vecteur $x = f - f_1$ et $y = f - f_2$:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ 4d^2 + \|x-y\|^2 &= 4d^2. \end{aligned}$$

On obtient $\|x-y\|^2 = \|f_2 - f_1\| = 0$ et donc $f_1 = f_2$.

Définition 3.2 *L'élément f^* est appelé la meilleure approximation de f dans F.*

Proposition 3.3 *Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de E et $f \in F$. f^* est la meilleure approximation de f dans F si et seulement si $f^* \in F$ vérifie*

$$\langle f - f^*, v \rangle = 0, \quad \forall v \in F. \tag{3}$$

La relation (3) peut s'écrire $f - f^* \in F^\perp$.
Démonstration.

1. Condition suffisante : Soit $v \in F$. Si $\langle f - f^*, v \rangle = 0$, alors les deux vecteurs $f - f^*$ et $f^* - v$ sont orthogonaux. Donc, par le théorème de Pythagore on a

   $$\|f - v\|^2 = \|f - f^*\|^2 + \|f^* - v\|^2$$

   d'où :
   $$\|f - f^*\|^2 \leq \|f - v\|^2, \quad \forall v \in F.$$

2. Condition nécessaire : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $v_\lambda = f^* + \lambda(v - f^*)$ où $v \in F$. On a

   $$\begin{aligned} \|f - f^*\|^2 &\leq \|f - v_\lambda\|^2 \\ &\leq \langle f - f^* - \lambda(v - f^*), f - f^* - \lambda(v - f^*) \rangle \\ &\leq \|f - f^*\|^2 + |\lambda|^2 \|f^* - v\|^2 - \overline{\lambda} \langle f - f^*, v - f \rangle - \lambda \langle v - f^*, f - f^* \rangle. \end{aligned}$$

   Donc

   $$|\lambda|^2 \|f^* - v\|^2 - \overline{\lambda} \langle f - f^*, v - f \rangle - \lambda \langle v - f^*, f - f^* \rangle \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

   si λ est un réel positif on a par un passage à la limite λ tends vers 0

   $$2\mathrm{Re}(\langle f - f^*, v - f^* \rangle) = 0, \ \forall v \in F,$$

de même si l'on considère λ imaginaire pure (avec une partie imaginaire positive) et par passage à la limite vers 0, on obtient

$$2\mathrm{Im}(\langle v - f^*, f - f^* \rangle) = 0, \ \forall v \in F.$$

d'où la condition nécessaire

$$\langle f - f^*, v \rangle = 0, \quad \forall v \in F.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ est une base de F. On peut alors écrire

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j, \qquad x_j \in \mathbb{K} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

En considérant $v = \phi_i$, la relation de caractérisation se traduit par les équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

La matrice G définie par $(G_{ij} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$ est appelée la matrice de Gram associée à la base $\mathcal{B}$. Il suffit alors de résoudre le système d'équations linéaires (4) qui admet une solution unique. En effet, la proposition suivante nous montre que la matrice de Gram est défini-positive et par voie de conséquence elle est inversible.

Proposition 3.4 *La matrice de Gram est définie-positive, c'est-à-dire :*

$$\langle Gx, x \rangle > 0, \qquad \forall 0 \neq x \in \mathbb{K}^n$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur non nul. On a

$$\begin{aligned}
\langle Gx, x \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \phi_i \rangle x_j \right) \\
&= \langle \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j, \sum_{i=1}^{n} x_i \phi_i \rangle \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \phi_k \right\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Si la base $\mathcal{B}$ est orthogonale ,c'est-à-dire : $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$, pour $i, j = 1, \ldots, n$ alors le système (4) est facile à calculer et on a

$$x_i = \frac{\langle f, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Proposition 3.5 *Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de E. On a alors*

$$E = F \oplus F^{\perp}. \tag{5}$$

Démonstration. Il est évident que $F \oplus F^{\perp} \subset E$. Si $x \in E$ alors par le théorème de projection, il existe un $x^* \in F$ tel que

$$\|x - x^*\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

On pose $x_2 = x - x^*$. D'après la proposition 3.3 on a $x_2 \in F^{\perp}$ et $x = x^* + x_2 \in F \oplus F^{\perp}$. Cette dernière écriture est unique.

4 Systèmes hilbertiens

Définition 4.1 *Soit $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ une famille de E. on dit que le système $\mathcal{B}$ est :*

1. *orthogonal si*
$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$
2. *orthonormé si*
$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases}$$
3. *total si $\mathcal{B}^{\perp} = \{0\}$.*

Définition 4.2 *Dans un système orthogonale $\mathcal{B}$, la suite de coefficients*

$$\left\{ c_k(f) = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

est appelée la suite des coefficients de Fourier de f dans le système $\mathcal{B}$

Théorème 4.3 (Inégalité de Bessel) *Soit $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ un système orthogonal. On a alors pour tout $f \in E$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \leq \|f\|^2 \tag{6}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, Les deux vecteur $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k$ et $v_n = f - u_n$ sont orthogonaux. En effet,

$$\begin{aligned}
\langle u_n, v_n, \quad \rangle &= \langle \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k, f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\langle \phi_k, f\rangle - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_k(f)\overline{c_j(f)}\langle \phi_k, \phi_j\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{|\langle f, \phi_k\rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k\rangle} - \sum_{k=0}^{n} \frac{|\langle f, \phi_k\rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k\rangle} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On applique alors le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 && (7) \\
&\geq \|u_n\|^2 && (8) \\
&\geq \langle \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k, \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k \rangle && (9) \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{|\langle f, \phi_k\rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k\rangle} && (10)
\end{aligned}$$

Comme f ne dépend pas de n alors de la relation

$$\|f\|^2 \geq \|f\|^2 \frac{|\langle f, \phi_k\rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k\rangle}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

et par passage à la limite, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\langle f, \phi_k\rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k\rangle}\} \leq \|f\|^2$$

5 Bases hilbertiennes

Dans cette section, on souhaite généraliser les propriété de la base en dimension infinie. Pour cela, on doit répondre à deux questions importantes :

1. 'étudier la convergence de la série

$$S(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\phi_k. \tag{11}$$

2. En cas de convergence, a-t-on l'égalité $f = S(f)$?

Le théorème suivant nous donne une réponse à la première question.

Théorème 5.1 (Théorème de Reisz-Fisher) *Soit E un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ un système orthogonal. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \phi_k$ dans E si et seulement si la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2$ est convergente.*

Démonstration.

Condition nécessaire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \phi_k\|^2 &= \langle \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \phi_k, \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \phi_k \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2. \end{aligned}$$

Par passage à la limite et par continuité de la norme, on a La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \phi_k$ converge dans E implique que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2$ est convergente.

Condition suffisante : On suppose que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2, \quad \text{est convergente.}$$

On souhaite montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_k, \quad \text{converge dans } E.$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$. On a

$$\begin{aligned} \|S_p - S_q\|^2 &= \|\sum_{k=q+1}^{p} \alpha_k \phi_k\|^2 \\ &= \langle \sum_{k=q+1}^{p} \alpha_k \phi_k, \sum_{k=q+1}^{p} \alpha_k \phi_k \rangle \\ &= \sum_{k=q+1}^{p} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2 \end{aligned}$$

La convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2$ entraine que la le terme général de la série est une suite de Cauchy, c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$

il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p > q \geq n_0, \qquad \sum_{k=q+1}^{p} |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2 < \epsilon,$$

e donc $\|S_p - S_q\|^2 < \epsilon$. Donc la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_k$ est de Cauchy dans E et, par voie de conséquence, elle est convergente (E est un espace de Hilbert) vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \phi_k \in E$.

Proposition 5.2 *Soit E un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ un système orthogonal. Alors pour tout $f \in E$, la série de Fourier de f :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\phi_k$$

est convergente dans E

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Bessel (6), on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \} \leq \|f\|^2$$

Donc, d'après le théorème précédent (Riesz-Fisher), la série de Fourier de f est convergente.

Définition 5.3 *Soit E un espace de Hilbert. Un système orthogonal $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est appelé base hilbertienne orthogonale si et seulement si pour tout $f \in E$ on a*

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\phi_k.$$

C'est-à-dire la limite de la série de Fourier de f est f.

Le théorème suivant caractérise les bases orthogonales dans un espace de Hilbert.

Théorème 5.4 *Soit E un espace de Hilbert et $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ un système orthogonal. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) *$\mathcal{B}$ est un système total.*

(B) *L'ensemble des combainaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{B}$ est dense dans E.*

(C) *$\mathcal{B}$ est une base orthogonale.*

(D) *Pour tout $f \in E$:*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \|\phi_k\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \tag{12}$$

Cette identité est appelée égalité de Parseval.

Démonstration. On va démontrer les implications suivantes :

$$\text{(A)} \Longrightarrow \text{(B)} \Longrightarrow \text{(C)} \Longrightarrow \text{(D)} \Longrightarrow \text{(A)}$$

(A) $\Longrightarrow$ (B) Soit $\mathcal{B} = \{\phi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. On suppose que $\mathcal{B}$ est total, c'est-à-dire $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$. On note $\langle \mathcal{B} \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{B}$. On peut montrer que $\overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$ est un sous-espace vectoriel fermée.

Supposons que $\overline{\langle \mathcal{B} \rangle} \neq E$ n'est pas dense dans E. Il existe alors $f \in E$ et $f \neq \overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$. En appliquant le théorème de projection sur le sous espace vectoriel fermé $F = \overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$, on déduit qu'il existe un $f^* \in \overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$ tel que

$$f - f^* \in (\overline{\langle \mathcal{B} \rangle})^\perp$$

Comme $\mathcal{B} \subset \overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$ alors $(\overline{\langle \mathcal{B} \rangle})^\perp \subset \mathcal{B}^\perp$. Donc $\mathcal{B}^\perp = \{0\} \Longrightarrow f = f^*$. ce qui contredit l'hypothèse $f \notin \overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$.

(B) $\Longrightarrow$ (C) On suppose que $\overline{\langle \mathcal{B} \rangle}$ est dense dans E. Donc pour tout $f \in E$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|f - \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \phi_k\| < \epsilon.$$

Par la propriété de la meilleure approximation, on a

$$\|f - \sum_{k=0}^{m} c_k(f)\phi_k\| \leq \|f - \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \phi_k\|, \tag{13}$$

et donc pour tout $n \in N$ tel que $n \geq m$, on a

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k\| \leq \|f - \sum_{k=0}^{m} c_k(f)\phi_k\|, \tag{14}$$

Ce qui montre la convergence de la série $\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k\|$ vers f et

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\phi_k.$$

(C) $\Longrightarrow$ (D) Les deux vecteur $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k$ et $v_n = f - u_n$ sont orthogonaux. Donc le théorème de Pythagore nous donne $\|f\|^2 = \|u_n\|^2 + \|v_n\|^2$. Obtient alors

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 \|\phi_k\|^2. \tag{15}$$

Comme $f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\phi_k$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k\|^2 = 0.$$

On déduit alors

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \|\phi_k\|^2$$

(D) $\Longrightarrow$ (A) Soit $f \in \mathcal{B}^{\perp}$. Donc f est orthogonal avec les éléments de $\mathcal{B}$:

$$\langle f, \phi_k \rangle = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant l'égalité de Parseval

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On déduit que $f = 0$.

Une conséquence immédiate est la propriété suivante.

Proposition 5.5 *Deux éléménts d'un espace de Hilbert E ayant les mêmes coefficients de Fourier dans une base orthogonale sont égaux*

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'égalité de Parseval.

Proposition 5.6 (Algorithme de Gram-Schmidt) *Soit $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ une base d'un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert E. On pose*

$$\begin{aligned} \phi_1 &= g_1, \\ \phi_2 &= g_2 - \frac{\langle g_2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}\phi_1, \\ \phi_k &= g_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle g_k, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}\phi_i, \qquad k = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

On a alors $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ est une base orthogonale de F.

Démonstration. On remarque que tout $k = 1, \dots, n$, l'élément ϕ_k s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$ et donc $\phi_k \in F$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1, \phi_2 \rangle &= \langle \phi_1, g_2 - \frac{\langle g_2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}\phi_1 \rangle \\
&= \langle \phi_1, g_2 \rangle - \frac{\langle g_2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}\langle \phi_1, \phi_1 \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc ϕ_1 et ϕ_2 sont orthogonaux. Par récurrence, On suppose que $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ pour $i, j = 1, \dots, k-1$ et $i \neq j$ et on montre que pour tout k le vecteur ϕ_k est orthogonale aux vecteur ϕ_j pour $j = 1, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_k, \phi_j \rangle &= \langle g_k, \phi_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle g_k, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}\langle \phi_i, \phi_j \rangle \\
&= \langle g_k, \phi_j \rangle - \frac{\langle g_k, \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle}\langle \phi_j, \phi_j \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme la dimension de F est n, alors $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ est une base orthogonale de F.

Théorème 5.7 *Tout espace de Hilbert séparable E admet une base hilbertienne orthogonale.*

Démonstration. Comme l'espace E est séparable alors il existe un ensemble dénombrable $A = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E et dense dans E. On peut extraire un sous ensemble B (dénombrable et) libre : c'est-à-dire aucun vecteur n'est une combinaison linéaire des autres vecteur de B. L'ensemble B n'est pas nécessairement dense dans E cependant il reste total. On applique alors l'algorithme de Gram-Schmidt sur les élément de B et on obtient un ensemble total de vecteurs orthogonaux.

Théorème 5.8 (Théorème de représentation de Riesz) *Pour tout $a \in E$, l'application f définie de E dans $\mathbb{K}$ par $f(x) = \langle x, a \rangle$ est une forme linéaire continue sur E.*
Réciproquement, si f est une forme linéaire continue sur E alors il existe un élément $a \in E$ tel que :

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \qquad x \in E.$$

Ce théorème montre que E est *"identique"* à son propre dual.

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy Shwarz

$$|f(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\|\|x\|$$

cette inégalité implique la continuité de f. en effet pour toute suite $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ convergente vers x^*, la suite $\{f(x_n))\}_{n\mathbb{N}}$ convergente vers $f(x^*)$.

Réciproquement, soit f une forme linéaire continue. On suppose que $f \neq 0$ et $N = \ker f$. Donc $N^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $\alpha \in N^{\perp}$ non nul, on alors $f(\alpha) \neq$. Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{f(x)}{f(\alpha)}\alpha + \left[x - \frac{f(x)}{f(\alpha)}\alpha\right] \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle x_2, \alpha\rangle &= \langle x - \frac{f(x)}{f(\alpha)}\alpha, \alpha\rangle \\ &= \langle x, \alpha\rangle - \frac{f(x)}{f(\alpha)}\langle \alpha, \alpha\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

Comme $f(x_2) = f(x) - \frac{f(x)}{f(\alpha)}f(\alpha) = 0$ alors $x_2 \in N$. Étant $\alpha \in N^{\perp}$, on a $\langle x_2, \alpha\rangle = 0$, c'est-à-dire, l'équation (16) nous donne

$$\langle x, \alpha\rangle = \frac{f(x)}{f(\alpha)}\langle \alpha, \alpha\rangle$$

d'où $f(x) = \langle x, a\rangle$ avec

$$a = \frac{\overline{f(\alpha)}}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$