Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Année 2023-2024.

Solution des exercices (1) et (3), série de TD 3

Solution de l'exercice 1

1) Soient $T \in B(H)$, et $x,\ y \in H$. Alors on a

$$\frac{1}{4}\Big[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\langle Tx+Ty, x+y\rangle - \langle Tx-Ty, x-y\rangle + i\langle Tx+iTy, x+iy\rangle - i\langle Tx-iTy, x-iy\rangle\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\langle Tx,x\rangle + \langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle + \langle Ty,y\rangle - \langle Tx,x\rangle - \langle Tx,-y\rangle - \langle -Ty,x\rangle - \langle -Ty,-y\rangle + i\langle Tx,x\rangle$$
$$+ i\langle Tx,iy\rangle + i\langle iTy,x\rangle + i\langle iTy,iy\rangle - i\langle Tx,x\rangle - i\langle Tx,-iy\rangle - i\langle -iTy,x\rangle - i\langle -iTy,-iy\rangle\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\langle Tx,x\rangle + \langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle + \langle Ty,y\rangle - \langle Tx,x\rangle + \langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle - \langle Ty,y\rangle + i\langle Tx,x\rangle$$
$$+ \langle Tx,y\rangle - \langle Ty,x\rangle + i\langle Ty,y\rangle - i\langle Tx,x\rangle + \langle Tx,y\rangle - \langle Ty,x\rangle - i\langle Ty,y\rangle\Big]$$

Après simplification, on obtient

$$= \frac{1}{4}\Big[\langle Tx,y\rangle + \langle Tx,y\rangle + \langle Tx,y\rangle + \langle Tx,y\rangle\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[4\langle Tx,y\rangle\Big]$$
$$= \langle Tx,y\rangle.$$

2) $a \Rightarrow b$. Cette implication est évidente.
$b \Rightarrow a$. Soient $T,\ S \in B(H)$ et $x, y \in H$. De la question 1, on trouve

$\langle Tx,\ y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\Big],$
et $\langle Sx,y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle S(x+y), x+y\rangle - \langle S(x-y), x-y\rangle + i\langle S(x+iy), x+iy\rangle - i\langle S(x-iy), x-iy\rangle\Big]$
Par l'application de (b), on a
$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle S(x+y), x+y\rangle, \langle T(x-y), x-y\rangle = \langle S(x-y), x-y\rangle, \langle T(x+iy), x+iy\rangle = \langle S(x+iy), x+iy\rangle$ et $\langle T(x-iy), x-iy\rangle = \langle S(x-iy), x-iy\rangle$.
On conclut que,

$$\forall x \in H,\ \langle Tx,y\rangle \ = \ \langle Sx,y\rangle.$$

D'où, $T = S$.
c) Si T est auto-adjoint ($T = T^*$), alors pour tout $x \in H$, on a

$$\langle Tx,\ x\rangle = \langle x,\ Tx\rangle = \overline{\langle Tx,\ x\rangle}.$$

Donc $\langle Tx,\ x\rangle \in \mathbb{R}$.
Inversement. On suppose que $\langle Tx,\ x\rangle \in \mathbb{R}$. Alors on a
$\langle Tx,\ x\rangle = \langle x,\ T^*x\rangle = \langle T^*x,\ x\rangle$.
D'après la question précédente, on déduit que $T = T^*$. Donc T est auto-adjoint .

Solution de l'exercice 3

1) Montrons que $\|T\| = \|T^*\|$. Si $T = 0$, alors l'égalité est évidente. On suppose que $T \neq 0$. Pour tout $x \in H$, on a

$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$

D'après l'inégalité de cauchy, on trouve

$\|Tx\|^2 \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*\|\|T\|\|x\|^2$.

Donc

$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|^2 \leq \|T^*\|\|T\|$.

Par conséquent,

$\|T\|^2 \leq \|T^*\|\|T\|$.

Ce qui implique $\|T\| \leq \|T^*\|$ . ...(*)

D'autre part, si on remplace T par T^* dans l'inégalité (*), on obtient $\|T^*\| \leq \|(T^*)^*\| = \|T\|$.

On conclut que $\|T\| = \|T^*\|$.

2) On a $(TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*$. Donc TT^* est auto-adjoint.

Da même, on montre que T^*T est aussi auto-adjoint.

3) Puisque $\|T\| = \|T^*\|$, on a $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|\,\|T\| = \|T\|^2 \ldots\ldots (**)$.

D'autre part, pour $x \in (H)_1$. on trouve

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &\geq \|T^*Tx\| \\ &= \|T^*Tx\|\,\|x\| \\ &\geq |\langle T^*Tx, x\rangle| (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= |\langle Tx, Tx\rangle| \\ &= \|Tx\|^2.\end{aligned}$$

Donc, $\|T^*T\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\right)^2 = \|T\|^2 \ldots\ldots (***)$.

De $(**)$ et $(***)$, on déduit que $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

4) On suppose que T est inversible. Alors $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Par passage à l'adjoint, on obtient

$$(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*,$$

Donc $(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$,

On conclut que, T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

5) Montrons que $R(T)^\perp = N(T)^*$.

Soit $y \in H$. On a

$$\begin{aligned} y \in R(T)^\perp &\Longleftrightarrow \forall x \in H,\ \langle Tx, y\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in H,\ \langle x, T^*y\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow T^*y = 0 \\ &\Longleftrightarrow y \in N(T^*). \end{aligned}$$

Donc, $R(T)^\perp = N(T^*)$.

6) On suppose que T normal, donc $TT^* = T^*T$. Par conséquent

$x \in N(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \|Tx\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle T^*Tx, x\rangle = 0$

Comme T normal, on trouve

$x \in N(T) \Leftrightarrow \|Tx\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle Tx, Tx\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle TT^*x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle T^*x, T^*x\rangle = 0 \Leftrightarrow \|T^*x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|T^*x\| = 0 \Leftrightarrow x \in N(T^*)$.