Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2, AFTOL \2023-2024

Série de TD 2.
Théorie des inverses généralisés

Dans tout ce qui suit H un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soit* $A \in B(H)$.
1)- Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A *une isométrie partielle ;*
(b) $R(A)$ *fermé et* $A^{+} = A^{*}$.

2)- Supposons que $\|A\| \leq 1$. *Montrer que si* A *possède un inverse généralisé* B *vérifiant* $\|B\| \leq 1$, *alors on a*

(c) $\|A\| = \|B\| = 1$.
(d) *Pour tout* $x \in H$, $< (I - A^{*}A)Bx, Bx >= 0$.
(f) A *est une isométrie partielle telle que* $A^{+} = B$.

Exercice 2. *Soient* $A \in B(H)$ *un EP-opérateur et* $P \in B(H)$ *une projection orthogonale sur* $R(A)$.

(1) *Montrer que* AP *est Moore-Penrose inversible.*
(2) *Montrer que* AP *est EP.*

Exercice 3. *Soit* $A \in B(H)$ *à image fermée et soit* $A = UP$ *la décomposition polaire de* A. *Alors on a*

(1) $A^{+} = P^{+}U^{*}$ *et* $P^{+} = A^{+}U$
(2) $PP^{+} = P^{+}P = A^{+}UP = A^{+}A$,

Exercice 4. *Soit* $A = f \otimes e \in B(H)$ *un opérateur de rang 1.*

(1) *Vérifier que* A *est MP inversible.*
(2) *Montrer que* $A^{+} = e \otimes f_1$, *et déterminer* f_1.
(3) *En déduire que* $\|A^{+}\| = \dfrac{1}{\|A\|}$.

Exercice 5. *Soit* $A \in B(H)$ *à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est normal,*
(2) $AA^{*}A^{+} = A^{*}$ *et* $a(A) < +\infty$,
(3) $A^{+}A^{*}A = A^{*}$ *et* $d(A) < +\infty$.

Exercice 6. *Soient* $A \in B(H)$ *à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) A *est un EP opérateur,*
(2) $asc(A) < \infty$ *et* $A(A^{+})^2 = A^{+}$,
(3) $dsc(A^{+}) < \infty$ *et* $A^2A^{+} = A$,
(4) $asc(A) < \infty$ *et* $A^2A^{+} = A$,
(5) $dscA < \infty$ *et* $A^{+}A^2 = A$.