Table des matières

Chapitre 4

L'inverse de Drazin

Définition 4.0.1. Soit $A \in \mathrm{B}(H)$. On dit que l'opérateur $B \in \mathrm{B}(H)$ est l'inverse de Drazin de A d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si les conditions suivantes sont vérifiées : :

$$\begin{cases} AB = BA \\ BAB = B \\ A^{k+1}B = A^k \end{cases}$$

On note l'inverse de Drazin par A^D et on dit que A est Drazin-inversible.

Remarque 4.0.1. *Si A^D existe, alors*

1) A^D est un inverse extérieur de A

2) AA^D et A^DA sont deux projections

3) Si A inversible, $A^D = A^{-1}(k = 0)$

4) Si $k = 1$, $A^D = A^{\#}$

5) Si A est EP opérateur, alors $A^+ = A^D = A^{\#}$

6) Si P une projection, alors $P^D = P^{\#} = P$

7) Si P une projection orthogonal, alors $P^+ = P^D = P^{\#} = P$.

Théorème 4.0.1. *Soit $A \in B(H)$. Alors*

$$A \text{ est Drazin} - \text{inversible} \iff ind(A) < \infty.$$

Preuve. $(\Rightarrow)$. Supposons que A est Drazin-inversible d'ordre $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{cases} AA^D = A^DA...(1) \\ A^DAA^D = A^D...(2) \\ A^{k+1}A^D = A^k...(3) \end{cases}$$

De l'équation (3), On a $R(A^k) = R(A^{k+1}A^D) \subset R(A^{k+1})$. Donc $R(A^k) \subset R(A^{k+1})$ et comme $R(A^{k+1}) \subset R(A^k)$, alors $R(A^{k+1}) = R(A^k)$. Donc $d(A) \leq k < \infty$.
De (1) et (3) il résulte $A^DA^{k+1} = A^k$. Donc $N(A^{k+1}) \subset N(A^k)$ et comme $N(A^k) \subset N(A^{k+1})$, alors $N(A^k) \subset N(A^{k+1})$. D'où $a(A) \leq k < \infty$. Par conséquent $ind(A) < \infty$.
Inversement. Supposons que $ind(A) = n < \infty$. Si $n = 0$, alors A inversible et donc $A^D = A^{-1}$. Maintenant, si $n \geq 1$, alors $R(A^n)$ fermé et $H = R(A^n) \oplus N(A^n)$. Suivant cette somme on trouve :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n).$$

Montrons que A_1 inversible.
Soit $x \in R(A^n)$

$$\begin{aligned} A_1(x) = 0 &\iff A(x) = 0 \\ &\iff A^{n-1}A(x) = 0 \\ &\iff A^n(x) = 0 \\ &\iff x \in R(A^n) \cap N(A^n) = \{0\} \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Donc A_1 injectif.

Soit $y \in R(A^n)$. Comme $d(A) = n$, alors $R(A^n) = R(A^{n+1})$. Ce qui implique $y \in R(A^{n+1})$. Donc il existe $x \in H$ tel que $y = A^{n+1}(x) = AA^n(x)$. On pose $z = A^n(x) \in R(A^n)$, alors on conclut que $y = A(z) = A_1(z)$ et donc A_1 surjectif. Par conséquent A est bijectif et donc inversible car $R(A^n)$ fermé.

$A_2 : N(A^n) \longrightarrow R(A^n),\ A_2(x) = A(x).$

Soit $x \in N(A^n)$, Puisque $a(A) = n$, alors $N(A^n) = N(A^{n+1})$. Donc $x \in N(A^{n+1})$ et il s'ensuit :

$$A^{n+1}(x) = 0 \Longrightarrow A^n A(x) = 0 \Longrightarrow A(x) \in N(A^n) \cap R(A^n) = \{0\}.$$

Donc $A_2 = 0$.

$A_3 : R(A^n) \longrightarrow N(A^n),\ A_3(x) = A(x).$

Soit $x \in R(A^n)$, alors $A_3(x) = A(x) \in R(A^{n+1}) = R(A^n)$, car $d(A) = n$. Donc

$$A_3(x) \in R(A^n) \cap N(A^n) = \{0\}.$$

D'où $A_3 = 0$.

$A_4 : N(A^n) \longrightarrow N(A^n),\ A_4(x) = A(x).$

Alors pour $x \in N(A^n)$, $A_4^n(x) = A^n(x) = 0$. Donc A_4 est nilpotent d'ordre n.

Par conséquent si $ind(A) = n < \infty$, alors

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n),$$

où $A_1 \in B(R(A^n))$ inversible et $A_4^n = 0$.
Posons

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n)$$

et montrons que B est l'inverse de Drazin de A d'ordre n. On a

1. $BA = \begin{bmatrix} I_{R(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AB.$
2. $BAB = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$
3. $A^{n+1}B = \begin{bmatrix} A_1^{n+1} & 0 \\ 0 & A_4^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{n} & 0 \\ 0 & A_4^{n} \end{bmatrix} = A^n.$

Donc A est Drazin-inversible d'ordre n. □

Remarque 4.0.2. *Supposons que A est Drazin-inversible d'ordre k. De la preuve du théorème précédent, on déduit que :*

1. $R(A^D) = R(A^k)$ *et* $N(A^D) = N(A^k)$.
2. $R(A^D)$ *fermé .*
3. $AA^D = A^D A$ *des projections sur* $R(A^k)$ *et de noyau* $R(A^k)$.
4. $H = R(A^k) \oplus N(A^k) = R(A^D) \oplus N(A^k)$.

Théorème 4.0.2. *L'inverse de Drazin d'un opérateur est unique.*

Preuve. Soit $A \in B(H)$. Supposons par l'absurde que A possède deux inverses de Drazin différents A_1^D et A_2^D. Alors $A_1^D A$ et $A_2^D A$ sont deux projections sur $R(A^k)$ et ils ont le même noyau $N(A^k)$, donc $A_1^D A = A_2^D A$. Par conséquent :

$$A_1^D = A_1^D A A_1^D = A_2^D A A_1^D = A_2^D A A_2^D = A_2^D.$$

Ce qui contredit l'hypothèse $A_1^D \neq A_2^D$. □

Proposition 4.0.3. *(Propriétés de l'inverse de Drazin) On suppose que A est Drazin-inversible d'ordre k, alors on a :*

1. $(A^D)^*$ *est l'inverse de Drazin de* A^* *d'ordre* k.
2. $(A^n)^D = (A^D)^n$*, Pour tout* $n \in \mathbb{N}$
3. *Pour* $p \geq k$*,* $ind(A^k) \leq 1$ *et* $(A^p)^D = (A^p)^\# = (A^D)^p$.
4. $(A^D)^D = (A^D)^\# = A^2 A^D$
5. $(A^D)^D = A \iff ind(A) \leq 1$.

Preuve. (1)

$$\begin{gathered} A^*(A^D)^* = (A^D A)^* = (AA^D)^* = (A^D)^* A^* \\ (A^D)^* A^* (A^D)^* = (A^D A A^D)^* = (A^D)^* \\ (A^*)^{k+1}(A^D)^* = (A^{k+1})^*(A^D)^* = (A^D A^{k+1})^* = (A^{k+1} A^D)^* = (A^k)^* = (A^*)^k. \end{gathered}$$

Donc $(A^*)^D = (A^D)^*$.
(2), (3), (4) et (5) : voir le corrigé des exercices 5 et 6, série 3.

□