Table des matières

1 Inverse généralisé **2**

1.1 Inverse intérieur 3

1.2 Inverse extérieur 4

1.3 Inverse généralisé 4

2 L'inverse de Moore-Penrose **2**

2.1 Sur l'image d'un opérateur linéaire borné 2

2.2 L'inverse de Moore-Penrose 6

2.2.1 Quelques relations entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose . . 8

2.2.2 l'inverse de Moore-Penrose de Quelques matrices d'opérateurs (2×2). 9

2.2.3 EP opérateurs 10

2.2.4 Opérateur normal à image fermée 11

2.2.5 Isométrie partielle 12

2.2.6 Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles 12

Chapitre 1

Inverse généralisé

Dans ce chapitre E et F sont deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$ et $B(E, F)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de E dans F . Le noyau d'un opérateur $A \in B(E, F)$ est le sous-espace défini par $\mathcal{N}(A) = \{x \in E \ : \ Ax = 0\}$ et son image est le sous-espace $\mathcal{R}(A) = \{Ax \ : \ x \in E\}$. Il est clair que $\mathcal{N}A)$ est un sous-espace fermé de E, alors que $\mathcal{R}(A)$ est un sous-espace de F non nécessairement fermé.
Le Lemme qui suit est utile pour démontrer les résultats qui vont suivre.

Lemme 1.0.1. *Soit $P \in B(H)$ une projection, alors $R(P)$ est fermé et en plus on a*

$$H = R(P) \oplus N(P)$$

Preuve. Montrons que $R(P)$ fermé.
Soit $(y_n)_n \in R(P)$ tel que $y_n \to y \in B(H)$. Alors

$$P(y_n) = y_n \to y.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} P(y_n) = P(y) = y.$$

Alors $y \in R(P)$ et donc $R(P)$ fermé.
Comme P est une projection, alors $P = P^2$ et donc $(I - P)P = 0$.
Ce qui implique :

$$\mathcal{R}(P) \subset N(I - P)$$

Il reste à montrer que $N(I - P) \subset R(P)$
Soit

$$\begin{aligned} x \in N(I-P) &\Rightarrow (I-P)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = P(x) \\ &\Rightarrow x = PP(x) \\ &\Rightarrow x = P(y) \in R(P) \\ &\Rightarrow x \in R(P). \end{aligned}$$

Donc :

$$N(I - P) \subset R(P)$$

d'où

$$N(I-P)=R(P)$$

Maintenant, montrons que $H=N(P)\oplus R(P)$
on a $x=P(x)+(I-P)(x)$
comme $P(x)\in R(P)$ et $(I-P)(x)\in R(I-P)=N(P)$.
Donc :

$$x\in R(P)\cap N(P)=0,$$

alors :

$$H=R(P)\oplus N(P).$$

□

1.1 Inverse intérieur

Définition 1.1.1. On dit que l'opérateur $B\in B(F,E)$ est un inverse intérieur de A si $ABA=A$.

Proposition 1.1.1. *(propriétés de l'inverse intérieur). Si $B\in B(F,E)$ un inverse intérieur de A, alors :*

1. *AB et BA sont deux idempotents (projections)*
2. *$R(AB)=R(A)$ et $R(BA)\subset R(B)$.*
3. *$N(BA)=N(A)$ et $N(B)\subset N(AB)$.*
4. *$E=N(BA)\oplus N(BA)=N(A)\oplus R(BA)$.*
5. *$F=N(AB)\oplus R(AB)=N(AB)\oplus R(A)$.*
6. *$R(A)\cap N(B)=\{0\}$.*

Preuve.

1. On a
$$(AB)^2=(ABA)B=AB.$$
$$(BA)^2=B(ABA)=BA.$$
2. Comme $R(A)=R(ABA)\subset R(AB)\subset R(A)$, alors $R(A)\subset R(AB)\subset\ R(A)$. Donc $R(AB)=R(A)$.
3. Comme $N(A)\subset N(BA)\subset N(ABA)=N(A)$. alors $N(A)\subset N(BA)\subset N(A)$. D'où $N(BA)=N(A)$.
4. Comme AB une projection d'image $R(A)$ et BA une projection de noyau $N(A)$, alors
$$\begin{aligned}E&=N(BA)\oplus R(BA)\\&=N(A)\oplus R(BA).\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}F&=N(AB)\oplus R(AB)\\&=N(AB)\oplus R(A).\end{aligned}$$
5. Soit $y\in R(A)\cap N(B)$, alors $y\in R(A)$ et $y\in N(B)$. $y\in R(A),\exists x\in E$ *tel que* $Ax=y$. Donc $y=Ax=ABA(x)=ABy=A(0)=0$, car $y\in N(B)$.

□

1.2 Inverse extérieur

Définition 1.2.1. On dit que l'opérateur $C \in B(F,E)$ est un inverse extérieur de A si $CAC = C$.

Proposition 1.2.1. *(propriétés de l'inverse extérieur). Si $C \in B(F,E)$ un inverse extérieur de A, alors :*

1. *AC et CA sont deux idempotents (projections)*
2. *$R(CA) = R(C)$ et $N(A) \subset N(CA)$.*
3. *$R(AC) \subset R(A)$ et $N(AC) = N(C)$.*
4. *$E = N(CA) \oplus R(C),\ F = N(C) \oplus R(AC)$*

Preuve.

1. On a $(AC)^2 = A(CAC) = AC$ et $(CA)^2 = (CAC)A = CA$.
2. Comme $R(C) = R(CAC) \subset R(CA) \subset R(C)$, donc $R(CA) = R(C)$.
3. Comme $N(C) \subset N(AC) \subset N(CAC) = N(C)$, donc $N(AC) = N(C)$.
4. Comme CA est une projection d'image $R(C)$ et AC est une projection de noyau $N(C)$, alors

$$\begin{aligned} E &= N(CA) \oplus R(CA) \\ &= N(CA) \oplus R(C) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F &= N(AC) \oplus R(AC) \\ &= N(C) \oplus R(AC) \end{aligned}$$

□

1.3 Inverse généralisé

Définition 1.3.1. $S \in B(F,E)$ est un inverse généralisé de A si

$$\begin{cases} ASA = A, \\ SAS = S. \end{cases}$$

.

Proposition 1.3.1. *Si $S \in B(F,E)$ un inverse généralisé de A, alors :*

1. *$(AS)^2 = AS$ et $(SA)^2 = SA$*
2. *$R(AS) = R(A), N(AS) = N(S)$*
3. *$R(SA) = R(S), N(SA) = N(A)$*
4. *$E = N(A) \oplus R(S), F = N(S) \oplus R(A)$*

Preuve. La preuve découle des deux propositions précédentes. □

Exemple 1.3.1. 1. Soit $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$A(x, y, z) = (x, 0, 0),$$

et soit $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$B(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Alors pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$ABA(x, y, z) = AB(x, 0, 0) = A(x, 0, 0) = (x, 0, 0) = A(x, y, z).$$

Donc B est un inverse intérieur de A.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Par un calcul simple, on trouve $CAC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$. Donc C un inverse extérieur de A. De plus $ACA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Donc C un inverse intérieur de A. Par conséquent C un inverse généralisé de A.
3. Si $A \in \mathcal{B}(E, F)$ est inversible, alors $S = A^{-1}$ est l'unique inverse généralisé de A.

Théorème 1.3.2. *$A \in B(E, F)$ admet un inverse généralisé si et seulement si $R(A)$ fermé et $N(A))$ et $R(A)$ possèdent des supplémentaires topologiques dans E et F, respectivement.*

Preuve. ($\Rightarrow$). Supposons que A admet un inverse généralisé $S \in B(F, E)$, alors AS est une projection borné sur $R(A)$, donc $R(A)$ fermé et on a

$$\begin{aligned} F &= R(AS) \oplus N(AS) \\ &= R(A) \oplus N(AS) \end{aligned}$$

Alors $R(A)$ possède un supplémentaire topologique dans F. De même on a

$$\begin{aligned} E &= N(SA) \oplus R(SA) \\ &= N(A) \oplus R(SA) \end{aligned}$$

Donc $N(A)$ admet un supplémentaire topologique dans E.
($\Leftarrow$). Supposons que $R(A)$ fermé, X, Y sont deux sous espaces vectoriels fermés dans E, F respectivement, tels que

$$E = N(A) \oplus X \text{ et } F = Y \oplus R(A)$$

Posons $\tilde{A}$ la restriction de A sur X.

$$\begin{aligned} \tilde{A} : X &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto \tilde{A}(x) = A(x). \end{aligned}$$

– montrons que $\tilde{A}$ est injectif.
Soit $x \in X$ tq $\tilde{A}(x) = 0$ alors $A(x) = 0$ donc $x \in N(A)$. Comme $x \in X$ alors $x \in X \cap N(A) = \{0\}$. Donc x = 0, d'où A est injectif.
– Montrons que $\tilde{A}$ est surjectif (i.e. $\forall y \in R(A), \exists\, x \in X$ tq $y = \tilde{A}(x)$).
Soit $y \in R(A)$ alors il existe $z \in V$ tq $A(z) = y$. Puisque
$$V = N(A) \oplus X,$$
alors il existe $x_1 \in N(A)$ et $x_2 \in X$ tq $z = x_1 + x_2$. Il s'ensuit que
$$y = A(z) = A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = A(x_2) = \tilde{A}(x_2).$$
Donc $\tilde{A}$ est surjectif. D'où $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X, R(A))$ est bijectif et comme X et $R(A)$ sont fermés, alors par l'application du théorème du graphe fermé on obtient $\tilde{A}^{-1}$ inversible et $\tilde{A}^{-1} \in B(R(A), X)$.

Posons $S : F \longrightarrow E$
$$S(x) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(x) & /si\ \ x \in R(A) \\ 0 & /si\ \ x \in Y \end{cases}$$
Montrons que $ASA = A$.
Soit $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ ou' $x_1 \in N(A)$ et $x_2 \in X$.
$$\begin{aligned} ASA(x) &= ASA(x_1 + x_2) \\ &= ASA(x_2) \qquad car\ \ x_1\ \in N(A) \\ &= AS\tilde{A}(x_2) \qquad car\ \ \tilde{A}\ est\ la\ restriction\ \ de\ \ A\ sur\ X \\ &= A\tilde{A}^{-1}\tilde{A}(x_2) \qquad car\ \tilde{A}(x_2) \in R(A) \\ &= A(x_2) \\ &= A(x_1 + x_2) = A(x). \end{aligned}$$
alors S est un inverse intérieur de A.
Montrons que SAS = S.
Soit $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition $F = Y \oplus R(A)$, donc
$$\begin{aligned} SAS(x) &= SAS(x_1 + x_2) \\ &= SAS(x_2) \qquad car\quad x_1\ \ \in Y\ \ , donc\ \ S(x_1) = 0 \\ &= SA\tilde{A}^{-1}(x_2) \qquad car\ x_2 \in R(A) \\ &= S\tilde{A}\tilde{A}^{-1}(x_2) \qquad car\ \tilde{A}^{-1}(x_2) \in X \\ &= S(x_2) \\ &= S(x_1 + x_2) = S(x). \end{aligned}$$
Alors S est un inverse extérieur de A. Donc S est un inverse généralisé de A. □

Remarque 1.3.1. *1. En dimension finie tout opérateur admet un inverse généralisé.*
2. L'inverse généralisé n'est pas unique. Il suffit de voir l'exemple suivant

Exemple 1.3.2. Soit le shift à gauche défini sur l'espace $l^2(\mathbb{N})$ par :
$$\begin{aligned} S_l : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) &\longmapsto (x_2, x_3, ...). \end{aligned}$$

Considérons les deux opérateurs linéaires suivants :

$$\begin{aligned} S_r : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) &\longmapsto (0, x_1, x_2, ...), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) &\longmapsto (x_1, x_1, x_2 ...). \end{aligned}$$

Alors pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l^2(\mathbb{N})$ on a :

$$S_l S_r S_l(x_1, x_2, ...) = S_l(x_1, x_2, ...),$$

et

$$S_r S_l S_r(x_1, x_2, ...) = S_r(x_1, x_2, ...).$$

Donc S_r est un inverse généralise de S_l et on a aussi :

$$S_l T S_l(x_1, x_2, ...) = S_l T(x_2, x_3, ...) = S_l(x_2, x_2, x_3 ...) = (x_2, x_3, ...) = S_l(x_1, x_2, ...),$$

et

$$T S_l T(x_1, x_2, ...) = T S_l(x_1, x_1, x_2 ...) = T(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_1, x_2 ...) = T(x_1, x_2, ...).$$

Donc T un autre inverse généralisé de S_l tel que $S_r \neq T$.

Chapitre 2

L'inverse de Moore-Penrose

Dans ce chapitre H un espace de Hilbert.

2.1 Sur l'image d'un opérateur linéaire borné

Théorème 2.1.1. (*Douglas 1966*) *Soit $A, B \in B(H)$, alors les propriétés suivantes sont équivalantes :*

(a) $R(A) \subseteq R(B)$.

(b) $\exists\, \lambda > 0,\ AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.

(c) $\exists\, C \in B(H)$ *tq :* $A = BC$.

Preuve. • $a \Longrightarrow c$.

Supposons $R(A) \subseteq R(B)$.

Soit B_0 la restriction de B sur $N(B)^\perp$.

$$\begin{aligned} B_0 : N(B)^\perp &\longrightarrow R(B) \\ x \quad &\longmapsto B_0(x) = B(x) \end{aligned}$$

B_0 est un opérateur linéaire borné.

– B_0 est injectif car $\forall\, x \in N(B)^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} B_0(x) = 0 &\Longrightarrow B(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in N(B) \\ &\Longrightarrow x \in N(B) \cap N(B)^\perp \\ &\Longrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Comme B_0 est injectif et fermé.

Alors $B_0^{-1} : R(B) \longrightarrow N(B)^\perp$ est un opérateur fermé. Posons $C = B_0^{-1}A$, puisque $R(A) \subseteq R(B)$. Alors

$$C : H \longrightarrow N(B)^\perp.$$

Comme C fermé, H et $N(B)^\perp$ sont deux espaces de Banach alors C est borné (d'après le théorème du graphe fermé).

Donc $C = B_0^{-1}A \Longrightarrow A = B_0C = BC$ car $R(C) \subset N(B)^\perp$.

- $c \Longrightarrow b$.
  Supposons $\exists\, C \in B(H)$ tq $A = BC$ donc $A^* = C^*B^*$.
  Pour $x \in H$:

$$\begin{aligned}\langle AA^*x, x\rangle &= \|A^*x\|^2\\ &= \|C^*B^*x\|^2\\ &\leq \|C^*\|^2\|B^*x\|^2\\ &\leq \|C^*\|^2\langle BB^*x, x\rangle.\end{aligned}$$

  Posons $\lambda = \|C^*\| > 0$ donc $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.
- $b \Longrightarrow a$.
  Supposons $\exists\, \lambda > 0$ tq $AA^* \leq BB^*$.
  Soit l'opérateur $D : R(B^*) \longrightarrow R(A^*)$ défini par $\forall\, x \in H, D(B^*(x)) = A^*(x)$.
  En effet $\forall\, y \in R(B^*), \exists\, x \in H$ tq $y = B^*(x) \Longrightarrow D(y) = D(B^*(x)) = A^*(x)$. Donc $DB^* = A^*$.
  D est linéaire.
  Montrons que D est borné.
  Soit $y \in R(B^*), \exists\, x \in H$, tq $y = B^*(x)$

$$\begin{aligned}\|Dy\|^2 &= \|DB^*(x)\|^2\\ &= \|A^*x\|^2\\ &= \langle AA^*x, x\rangle\\ &\leq \lambda^2\langle BB^*x, x\rangle\\ &\leq \lambda^2\|B^*x\|^2.\end{aligned}$$

  $\|Dy\|^2 \leq \lambda^2\|y\|^2 \Longrightarrow \|D(y)\| \leq \lambda\|y\|$ et $y > 0$. Donc D est borné sur $R(B^*)$.
  Donc par l'application du théorème de prolongement par continuté, il existe $\tilde{D}$ un opérateur unique linéaire borné tq :

$$\tilde{D} : \overline{R(B^*)} \longrightarrow R(A^*) \text{ et } \tilde{D}(x) = D(x) \text{ pour } x \in \overline{R(B^*)} \text{ et } \|\tilde{D}\| = \|D\|.$$

  Donc $DB = A^*$.
  Comme $H = \overline{R(B^*)} \oplus R(B^*)^{\perp}$.
  Posons : $S : H \longrightarrow H$

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{D}(x) & \text{si } x \in \overline{R(B^*)}.\\ 0 & \text{si } x \in R(B^*)^{\perp}.\end{cases}$$

  S est un opérateur linéaire borné et $SB^* = DB^* = A^*$, alors $BS^* = A$. Donc $R(A) = R(BS^*) \subset R(B)$.

$\square$

Remarque 2.1.1. *Soit $T \in B(H)$, alors $\mathcal{R}(T)$ n'est pas toujours fermé. Il suffit de voir l'exemple suivant :*

Exemple 2.1.1.

$$\begin{array}{cccc} T : & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N})\\ & x = (x_1, x_2, \cdots) & \longmapsto & T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)\end{array}$$

Soit $x_n(j) \in l^2(\mathbb{N})$ une suite telle que :

$$x_n(j) = \begin{cases} 1 & si j \leqslant n \\ 0 & si j > n \end{cases}$$

Alors $T(x_n) \in R(T)$ et

$$Tx_n(j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & si j \leqslant n \\ 0 & si j > n \end{cases}$$

Il est clair que (Tx_n) converge vers $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, mais $y \notin R(T)$. Donc $R(T)$ n'est pas fermé.

Théorème 2.1.2. *Soient $A, B \in B(H)$. Alors on a :*

(i) $R(A) = R((AA^*)^{\frac{1}{2}})$.

(ii) $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$.

(iii) *$R(A)$ fermé si et seulement si $R(AA^*)$ fermé. Dans ce cas $R(A) = R(AA^*)$,*

(iv) *$R(A)$ fermé si et seulement si $R(A^*)$ fermé.*

Preuve. (*i*) On a $AA^* = (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}}$. Alors

$$\begin{cases} AA^* \leq (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ et \\ (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}} \leq AA^*. \end{cases}$$

En vertu du théorème précédent, on obtient

$$\begin{cases} R(A) \subset R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) \\ et \\ R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) \subset R(A). \end{cases}$$

Donc $R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A)$.
(*ii*) Soit $T \in B(H)$ défini par :

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H.$$

$R(T) = R(A) + R(B)$. On a

$$T^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \; TT^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; et \; (TT^*)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors $R(TT^*)^{\frac{1}{2}} = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$. D'après (i), $R(T) = (R(TT^*)^{\frac{1}{2}})$. Donc

$$R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}).$$

(*iii*) Supposons que $R(A)$ est fermé, alors

$H = R(A) \oplus R(A)^{\perp} = R(A) \oplus N(A^*)$. D'autre part, on a
$H = \overline{R(A^*)} \oplus \overline{R(A^*)}^{\perp} = \overline{R(A^*)} \oplus R(A^*)^{\perp} = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$.

Donc on peut écrire A sous la forme matricielle suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \overline{R(A^*)} \oplus N(A) \to R(A) \oplus N(A^*),$$

$$\begin{aligned} A_1 : A \setminus \overline{R(A^*)} &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto A_1(x) = A(x). \end{aligned}$$

Montrons que A_1 bijectif.
A_1 injectif
On a $A_1 : A \setminus R(A) \longrightarrow R(A)$
Soit $x \in \overline{R(A^*)}$ tel que $A_1 x = 0$, alors $Ax = 0$. Cela nous donne $x \in N(A) \cap \overline{R(A^*)} = \{0\}$.
A_1 surjectif.
Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ $y = Ax$. Comme $x \in H$, donc $\exists x_1 \in \overline{R(A^*)}$ et $x_2 \in N(A)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Donc $Ax = Ax_1 = A_1 x_1$.
Par conséquent A_1 est un opérateur linéaire borné bijectif sur $\overline{R(A^*)}$. Comme $\overline{R(A^*)}$ et $R(A)$ sont fermés alors A_1 est inversible.
On a $A_2 : A \setminus N(A) \longrightarrow R(A)$.
Soit $x \in N(A)$. On a $A_2 x = Ax = 0$. Donc $A_2 = 0$.
On a $A_3 : A \setminus \overline{R(A^*)} \longrightarrow N(A^*)$.
Soit $x \in \overline{R(A^*)}$. On a $A_3 x = Ax \in R(A) \cap N(A^*) = \{0\}$. D'où $A_3 = 0$.
$A_4 : A \setminus N(A) \longrightarrow N(A^*)$. Soit $x \in N(A)$. On a $A_4 x = Ax = 0$. Donc $A_4 = 0$.

$$AA^* = \begin{bmatrix} A_1 A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \to R(A) \oplus N(A^*)$$

Comme A_1 est inversible, alors $A_1 A_1^*$ est un opérateur inversible dans $\mathrm{B}(R(A))$, et Puisque $R(AA^*) = R(A_1 A_1^*)$, on obtient $R(AA^*) = R(A)$, d'où $R(AA^*)$ est fermé.
Inversement, Supposons que $R(AA^*)$ est fermé, alors $H = R(AA^*) \oplus N(AA^*)$.
Comme $N(AA^*) = N(A^*)$, on obtient :

$$H = R(AA^*) \oplus N(AA^*) \subset R(A) \oplus N(A^*) \subset H.$$

D'où $R(A) = N(A^*)^{\perp}$. Donc $R(A)$ est fermé et $R(A) = R(AA^*)$.
(iv) Supposons que $R(A)$ est fermé, alors on a $R(A) = R(AA^*)$, ceci implique que pour tout $x \in H$, il existe $y \in H$ tel que $Ax = AA^*y$, alors $A(x - A^*y) = 0$. Par conséquent $x - A^*y \in N(A)$.

$$x = (x - A^*y) + A^*y \in N(A) + R(A^*)$$

Donc $R(A^*) = N(A)^{\perp}$; alors $\forall x \in \mathcal{H}, x \in N(A) + R(A^*)$. Donc $H = N(A) + R(A^*)$ et comme $N(A) \cap R(A^*) = \{0\}$(car $R(A^*)^{\perp} = \overline{R(A^*)^{\perp}} = N(A)$). Par conséquent

$$\begin{aligned} H &= N(A) + R(A^*) \\ &= N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \ \ (\textit{somme direct topologique}) \end{aligned}$$

Comme $R(A^*) \subset \overline{R(A^*)}$, alors $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ (voir le TD.) D'où $R(A^*)$ est fermé.
On obtient l'implication réciproque par passage à l'adjoint. □

Remarque 2.1.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors on a :*
$\mathcal{R}(A)$ *fermé* $\iff$ $\mathcal{R}(AA^*)$ *fermé* $\iff$ $\mathcal{R}(A^*A)$ *fermé* $\iff$ $\mathcal{R}(A^*)$ *fermé.*
Dans ce cas $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}((AA^*)^{\frac{1}{2}})$.

Proposition 2.1.3. *Soit A un opérateur positif de $\mathcal{B}(H)$. Alors on a :*

(i) $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})$ *et* $\overline{R(A)} = \overline{\mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})}$,

(ii) $\mathcal{R}(A)$ *est fermé si et seulement si* $\mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})$ *est fermé,*

(iii) A *est inversible si et seulement si* $\mathcal{R}(A) = H$.

Preuve. 1. On a $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, Ceci implique $R(A) \subset R(A^{\frac{1}{2}})$.
Montrons que $N(A) = N(A^{\frac{1}{2}})$
Pour $x \in H$:

$$||A^{\frac{1}{2}}x||^2 =< A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x >=< Ax, x > .$$

Pour $x \in N(A)$, On a $Ax = 0$ et donc $||A^{\frac{1}{2}}x||^2 = 0$. Alors $A^{\frac{1}{2}}x = 0$. par conséquent $x \in N(A^{\frac{1}{2}})$. D'où $N(A) \subset N(A^{\frac{1}{2}})$, et comme $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, on trouve $N(A^{\frac{1}{2}}) \subset N(A)$. Alors $N(A) = N(A^{\frac{1}{2}})$, donc on obtient

$$N(A)^{\perp} = N(A^{\frac{1}{2}})^{\perp} \Longrightarrow \overline{R(A^*)} = \overline{R((A^{\frac{1}{2}})^*)} \Longrightarrow \overline{R(A)} = \overline{R(A^{\frac{1}{2}})}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} R(A)\, est\, ferme' &\iff R(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme' \\ &\iff R((A^{\frac{1}{2}})^*A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme' \\ &\iff R(A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme'. \end{aligned}$$

3. $(\Longrightarrow)$. évident.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que $R(A) = H$. Alors $R(A)^{\perp} = \{0\}$. Donc $N(A^*) = N(A) = \{0\}$. D'où A est invesible.

□

2.2 L'inverse de Moore-Penrose

Définition 2.2.1. L'inverse de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{B}(H)$ est l'opérateur $T^+ \in \mathcal{B}(H)$ vérifiant

$$\begin{cases} TT^+T = T. \\ T^+TT^+ = T^+. \\ (TT^+)^* = TT^+. \\ (T^+T)^* = T^+T. \end{cases}$$

Si T^+ existe, alors on dit que T est MP inversible.

Remarque 2.2.1.
- *$0^+ = 0$ et $(\lambda A)^+ = \frac{1}{\lambda}A^+$, pour $\lambda \neq 0$.*
- *Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, $(T^+)^+ = T$.*
- *Si T est inversible alors $T^+ = T^{-1}$.*
- *Si P est une projection alors $P^+ = P_{\mathcal{N}(P)^\perp} P_{\mathcal{R}(P)}$.*
- *Si P est une projection orthogonale alors $P^+ = P$.*
- *TT^+ est une projection orthogonale sur $R(T)$, de noyau $N(T^+)$.*
- *T^+T une projection orthogonale sur $R(T^+)$, de noyau $N(T)$.*

Théorème 2.2.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T posséde un inverse généralisé.*

(ii) *$R(T)$ est fermé.*

(iii) *T^+ existe et il est unique.*

Preuve. ⋆ (i) $\Longrightarrow$(ii).

Supposons que S est un inverse généralisé de T. Alors TS est un idempotent sur $R(T)$. Donc $R(T)$ est fermé.

⋆ (ii) $\Longrightarrow$(iii).

Si $R(T)$ est fermé, alors $R(T^*)$ est fermé aussi. Par conséquent
$H = R(T^*) \oplus N(T) = R(T) \oplus N(T^*)$. Donc T est sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(T^*) \oplus N(T) \to R(T) \oplus N(T^*).$$

où T_1 est un opérateur linéaire borné inversible de $R(T^*)$ dans $R(T)$.
Posons

$$S = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(T) \oplus N(T^*) \to R(T^*) \oplus N(T).$$

On a alors :

$$\begin{cases} TST = T. \\ STS = S. \\ TS = (TS)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{R}(T)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \\ ST = (ST)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{R}(T^*)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Donc S est l'inverse de Moore-Penrose de T.
Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il existe T_1^+, T_2^+ deux inverses de Moore-Penrose de T. Donc TT_1^+, TT_2^+ sont deux projections orthogonales sur $R(T)$ ce qui implique $TT_1^+ = TT_2^+$. En multipliant cette Dernière équation à gauche par T_1^+, et en utilisant la définition de l'inverse Moore-Penrose, on obtient $T_1^+ = T_1^+TT_2^+$.
Comme T_1^+T et T_2^+T sont deux projections orthogonales de noyau $N(T)$, alors
$T_1^+T = T_2^+T$. Donc $T_1^+ = T_2^+TT_2^+ = T_2^+$.

⋆ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) est vidente.

□

Remarque 2.2.2. *D'après la démonstration du théorème précédent, on conclut que si l'inverse de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{B}(H)$ existe alors :*

- $R(T^+) = R(T^+T) = R(T^*)$.
- $N(T^+) = N(TT^+) = N(T^*)$.
- $H = R(T) \oplus N(T^+)$ *et* $H = R(T^+) \oplus N(T)$.

2.2.1 Quelques relations entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose

le résultat suivant est une conséquence immédiate des deux théorèmes 2.2.1, 2.1.2

Théorème 2.2.2. *Soit $T \in B(E, F)$ alors les proprietés suivantes sont équvalentes :*
(1) T^+ *existe*
(2) $(T^*T)^+$ *existe*
(3) $(TT^*)^+$ *existe*
(4) $(T^*)^+$ *existe*

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'inverse de Moore-Penrose.

Proposition 2.2.3. *Soit $T \in \mathfrak{B}(H)$. Si $R(T)$ est fermé, alors on a :*
(i) $(T^*)^+ = (T^+)^*$.
(ii) $(T^*T)^+ = T^+(T^+)^*$.
(iii) $(TT^*)^+ = (T^+)^*T^+$.
(iv) $T^* = T^+TT^* = T^*TT^+$.
(v) $T^+ = (T^*T)^+T^* = T^*(TT^*)^+$.
(vi) $(T^*)^+ = T(T^*T)^+ = (TT^*)^+T$.

Preuve. (i) D'après la définition de T^+, on obtient :
1. $(T^+)^*T^*(T^+)^* = (T^+TT^+)^* = (T^+)^*$.
2. $T^*(T^+)^*T^* = (TT^+T)^* = T^*$.
3. $(T^*(T^+)^*)^* = T^+T = (T^+T)^* = T^*(T^+)^*$.
4. $((T^+)^*T^*)^* = TT^+ = (TT^+)^* = (T^+)^*T^*$.

Donc $(T^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de T^*.
(ii) Puisque on a :
1. $T^*TT^+(T^+)^*T^*T = T^*TT^+(TT^+)^*T = T^*TT^+TT^+T = T^*T$.
2. $T^+(T^+)^*T^*TT^+(T^+)^* = T^+(TT^+)^*TT^+(T^+)^* = T^+TT^+(T^+)^* = T^+(T^+)^*$.
3. $(T^*TT^+(T^+)^*)^* = T^+TT^+T = T^+T = (T^+T)^* = (TT^+T)^*(T^+)^* = T^*TT^+(T^+)^*$.
4. $(T^+(T^+)^*T^*T)^* = (T^+(T)T^+T)^* = T^+T = T^+(T^+)^*T^*T$.

Donc $T^+(T^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de T^*T.
(iii) Se déduit de (ii), en remplaçant T par T^+.
(iv) Comme T^+T est une projection sur $R(T^*)$, alors on obtient

$$T^* = T^+TT^* = (T^+T)^*T^* = T^*(TT^+)^* = T^*TT^+.$$

(v) Il est bien clair que $T^+ = T^+(T^+)^*T^*$. Par l'utilisation de (ii), on obtient la première égalité de (v). De la même méthode, on trouve la deuxième égalité de (v).
(vi) Se déduit de (v). □

2.2.2 l'inverse de Moore-Penrose de Quelques matrices d'opérateurs (2×2).

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

Théorème 2.2.4. *Soit $A \in B(E)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si A est MP inversible (i.e $R(A)$ fermé) et dans ce cas $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Preuve. Comme $R(T) = R(A)$, alors
T^+ existe $\iff$ R(T) fermé $\iff$ $R(A)$ fermé $\iff$ A^+ existe.
Il est facile de vérifier que $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

Théorème 2.2.5. *Soient $A \in B(E), B \in B(F)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si $R(A)$ et $R(B)$ sont fermés et dans ce cas $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$.*

Preuve. On a $R(A) \oplus R(B) \subset E + F$. Donc

$$\begin{aligned} T\, est\, MP\, inversible &\iff R(T) ferme' \\ &\iff R(A)\ ferme'\ et\ R(B)\ ferme'. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix}$. □

Théorème 2.2.6. *Soient $A \in B(E)$ et $B \in B(F, E)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si $R(A) + R(B)$ est fermé dans E et dans ce cas*

$$T^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve. On a

$$TT^* = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R(T) ferme' &\iff R(TT^*) ferme' \\ &\iff R(AA^* + BB^*) ferme' \\ &\iff (AA^* + BB^*)^+ existe. \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$R(AA^* + BB^*) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A) + R(B).$$

D'après la proposition 2.2.3, on a

$$T^+ = T^*(TT^*)^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Théorème 2.2.7. *Soient $A \in B(E,F)$ et $B \in B(F,E)$, posons $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si $R(A)+R(B)$ est fermé dans E et dans ce cas*

$$T^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^*(AA^*+BB^*)^+ \\ 0 & B^*(AA^*+BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$

Preuve. On a

$$TT^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AA^*+BB^* \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R(T) ferme' &\iff R(TT^*) ferme' \\ &\iff R(AA^*+BB^*) ferme' \\ &\iff R((AA^*+BB^*)^{\frac{1}{2}}) ferme' \\ &\iff R(A)+R(B) ferme'. \end{aligned}$$

Dans ce cas $(AA^*+BB^*)^+$ existe, alors

$$T^+ = T^*(TT^*)^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^*(AA^*+BB^*)^+ \\ 0 & B^*(AA^*+BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$

□

2.2.3 EP opérateurs

Définition 2.2.2. Soit $A \in B(H)$ à image fermée. On dit que A est un EP opérateur si $AA^+ = A^+A$.

Exemple 2.2.1. Si A est inversible, alors A est un EP opérateur ($AA^{-1} = A^{-1}A$)

Théorème 2.2.8. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A EP opérateur*
2. *$R(A) = R(A^*)$.*
3. *$N(A) = N(A^*)$.*
4. *$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*)$, où $A_1 \in B(H)$ inversible.*

Preuve. ($1 \Rightarrow 2$). Supposons que A est EP alors $AA^+ = A^+A$. ce qui donne $R(AA^+) = R(A^+A)$. Donc $R(A) = R(A^*)$.
($2 \Rightarrow 3$). Supposons que $R(A) = R(A^*)$. Alors $R(A)^\perp = R(A^*)^\perp$. Donc $N(A^*) = N(A)$.
($3 \Rightarrow 4$). Supposons $N(A) = N(A^*)$. On a

$$H = N(A^*)^\perp \oplus N(A^*) = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = R(A) \oplus N(A).$$

Donc

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A).$$

Il est clair que $A_2 = A_3 = A_4 = 0$.
Montrons queA_1 est injectif.

$$\begin{aligned} A_1 : R(A) &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto A_1(x) = A(x). \end{aligned}$$

Soit $x \in R(A)$ tel que $A_1x = 0 = Ax$. Donc $x \in R(A) \cap N(A) = \{0\}$.
Montrons que A_1 est surjectif
Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ tel que $Ax = y$. On a $x = x_1 \oplus x_2 \in R(A) \oplus N(A)$. Alors $y = Ax = Ax_1 = A_1x_1$ et donc A_1 surjectif.
Comme $R(A)$ est fermé, alors il est complet et puisque A_1 bijectif, alors il est inversible.
$(4 \Rightarrow 1)$. Supposons

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A),$$

où $A_1 \in B(R(A))$ inversible. puisque $R(A)$ fermé, alors A^+ existe et

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que $AA^+ = A^+A$. □

Remarque 2.2.3. *On a*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*)$$

A est EP oprateur $\iff$ A_1 *inversible et* $A_2 = 0$.

2.2.4 Opérateur normal à image fermée

Définition 2.2.3. On dit que $T \in B(H)$ est normal si $TT^* = T^*T$.

Proposition 2.2.9. *Soit $A \in B(H)$ un opérateur normal à image fermée. Alors A est un EP opérateur.*

Preuve. Puisque A normal, alors $N(A^*) = N(A)$. Comme $R(A)$ fermé alors d'après le théorème précédent, on trouve que A est EP opérateur. □

Remarque 2.2.4. *L'implication réciproque n'est pas vraie. Il suffit de voir l'exemple suivant :*

Exemple 2.2.2. Soit $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \longrightarrow H$ où A inversible mais n'est pas normal. Alors T n'est pas normal, car

$$TT^* = \begin{bmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^*T$$

Mais

$$TT^+ = \begin{bmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^+T.$$

Alors T est un EP opérateur.

Exemple 2.2.3. Soit $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Donc T n'est pas normal. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $T^+ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il est facile de voir que $TT^+ = T^+T$.

2.2.5 Isométrie partielle

Définition 2.2.4. On dit que $T \in B(H)$ est une isométrie partielle si $||Tx|| = ||x||, \ \forall x \in N(T)^\perp$.

Proposition 2.2.10. *Soit $T \in \mathrm{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *T est une isométrie partielle,*

(2) *T^* est une isométrie partielle,*

(3) *TT^* est une projection orthogonale sur $R(T)$,*

(4) *T^*T est une projection orthogonale sur $Ker(T)^\perp$,*

(5) *$TT^*T = T$,*

(6) *$T^*TT^* = T^*$.*

Preuve. Voir le cours du professeur Ameur Seddik . □

Théorème 2.2.11. *Soit $T \in B(H)$ image fermée. Alors*

$$T \text{ une isomtrie partielle} \iff T^+ = T^*.$$

Preuve. $(\Rightarrow)$ Supposons que T est une isométrie partielle. D'après la proposition précédente, on trouve

$$\begin{cases} T & = TT^*T, \\ T^* & = T^*TT^*, \\ TT^* & = P_{R(T)}, \\ T^*T & = P_{N(T)^\perp}. \end{cases}$$

On conclut que $T^+ = T^*$.
$(\Leftarrow)$. Supposons que $T^+ = T^*$. Ce qui implique que $T = TT^*T$, D'après la proposition précédente T est une isométrie partielle. □

Corollaire 2.2.1. *Soit $T \in B(H)$ à image fermée. Alors T est une isométrie partielle si et seulement si $T^+ = T^*$.*

2.2.6 Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles

Remarque 2.2.5. *Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles n'est pas toujours Moore-Penrose inversible. Il suffit de voir l'exemple suivant*

Exemple 2.2.4. Soit $A \in B(H)$ tel que $R(A)$ n'est pas fermé. Posons

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ et \ S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & I \end{bmatrix}.$$

T est MP inversible. De plus $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & I \end{bmatrix} = S.S$ Alors S est une projection donc elle est MP inversible. Mais $ST = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas MP inversible car R(A) n'est pas fermé.(R(ST) = R(A))

Théorème 2.2.12. *Soient $A \in B(G,F), B \in B(F,G)$ deux opérateurs à images fermées et soient $Q \in B(G)$ une projection de noyau $N(A)$ et $P \in B(G)$ une projection sur $R(B)$. Alors*

$$AB \text{ est } MP \text{ inversible} \iff QP \text{ est } MP \text{ inversible}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} AB \; est \; MP \, inversible &\iff R(AB) ferme' \\ &\iff AR(B) ferme' \\ &\iff AR(P) ferme' \\ &\iff R(AP) ferme' \\ &\iff R((AP)^*) ferme' \\ &\iff R(P^*A^*) ferme' \\ &\iff P^*R(A^*) ferme' \end{aligned}$$

Comme $R(A^*) = N(A)^{\perp} = N(Q)^{\perp} = \overline{R(Q^*)} = R(Q^*)$ car Q une projection. Donc

$$\begin{aligned} AB \; est \; MP \, inversible &\iff P^*R(Q^*) ferme' \\ &\iff R((P^*Q^*)^*) ferme' \\ &\iff R(QP) ferme' \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.2. *Soient $A \in B(F,G), B \in B(G,F)$ à images fermées. Alors*

$$AB \; est \; MP \, inversible \iff R(A^+ABB^+) \; ferme'.$$

Preuve. Puisque $A^+A \in B(F)$ est une projection de noyau $N(A)$ et BB^+ est une projection sur $R(B)$. Alors par l'application du théorème précédent, on trouve

$$AB \; est \; MP \, inversible \iff R(A^+ABB^+) \; ferme'.$$

□

Théorème 2.2.13. *Soient E, F, G des espaces de Hilbert,et $A \in B(G,F), B \in B(E,G)$ à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $(AB)^+AB = B^+A^+AB$

2. $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$

Preuve. (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. Comme

$$R(A^+A) = R(A^+) = R(A^*),$$

alors on trouve $A^+ABB^*A^* = BB^*A^*$. Par passage à l'adjoint, on obtient

$$ABB^*(A^+A)^* = ABB^*,$$

$$ABB^*A^*(A^+)^* = ABB^*$$

En multipliant cette dernière égalité à gauche par $(AB)^+$, on trouve

$$(AB)^+ABB^*A^*(A^+)^* = (AB)^+ABB^*. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a

$$R((AB)^+AB) = R((AB)^+) = R((AB)^*) = R(B^*A^*),$$

donc

$$(AB)^+ABB^*A^* = B^*A^*.$$

De 2.1, on obtient

$$B^*A^*(A^+)^* = (AB)^+ABB^*,$$

on en déduit que

$$B^*A^*(A^+)^*(B^+)^* = (AB)^+ABB^*(B^+)^*.$$

$$\begin{aligned}(B^+A^+AB)^* &= (AB)^+AB(B^+B)^* \\ &= (AB)^+ABB^+B \\ &= (AB)^+AB\end{aligned}$$

Donc

$$(B^+A^+AB)^* = (B^+A^+AB) = ((AB)^+AB)^* = (AB)^+AB.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons maintenant que $(AB)^+AB = B^+A^+AB$.
Comme $(AB)^+AB$ est une projections orthogonale sur B^*A^*, alors $(AB)^+ABB^*A^* = B^*A^*$ et donc

$$B^+A^+ABB^*A^* = B^*A^*.$$

En multipliant cette égalité à gauche par l'opérateur ABB^*B, on obtient

$$ABB^*BB^*A^* = AB(B^*BB^+)A^+ABB^*A^* = ABB^*A^+ABB^*A^*.$$

Par conséquent

$$ABB^*(I - A^+A)BB^*A^* = 0$$

Alors pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}0 &=< (ABB^*(I - A^+A)BB^*A^*)(x), x > \\ &=< (I - A^+A)BB^*A^*)(x), BB^*A^*(x) > \\ &=< (I - A^+A)BB^*A^*)(x), (I - A^+A)BB^*A^*(x) >\end{aligned}$$

car $I - A^+A$ est un projection orthogonale. Alors

$$(I - A^+A)BB^*A^* = 0.$$

Il s'ensuit que

$$R(BB^*A^*) \subset N(I - A^+A) = R(A^+A) = R(A^*).$$

On conclut que $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. □

Théorème 2.2.14. *Soient $A \in B(G, F)$ et $B \in B(E, G)$ deux opérateurs à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $AB(AB)^+ = ABB^+A^+$

2. $R(A^*AB) \subset R(B)$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} AB(AB)^+ = ABB^+A^+ &\iff (AB(AB)^+)^* = (ABB^+A^+)^* \\ &\iff ((AB)^+)^*B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \\ &\iff ((AB)^*)^+B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \\ &\iff (B^*A^*)^+B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \end{aligned}$$

Puisque$R(AB)$ fermé, alors $R(B^*A^*)$ est aussi fermé. D'après le théorème précédent, on déduit que

$$AB(AB)^+ = ABB^+A^+ \iff R(A^*AB) \subset R(B).$$

□

Théorème 2.2.15. *Soient $A \in B(G, F), B \in B(E, G)$ deux opérateurs à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $(AB)^+ = B^+A^+$;

(2) $R(A^*AB) \subset R(B)$ *et* $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$.

Preuve.

$1 \Longrightarrow 2$. Cette implication est dérivée à partir des deux Théorèmes 3.2.13 et 3.2.14.

$2 \Longrightarrow 1$. Supposons que $R(A^*AB) \subset R(B)$ et $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. Par l'application des deux théorèmes précédents on trouve :

- $ABB^+A^+AB = AB(AB)^+AB = AB$.
- $(ABB^+A^+)^* = (AB(AB)^+)^* = AB(AB)^+$.
- $(B^+A^+AB)^* = ((AB)^+AB)^* = (AB)^+AB$.

Donc pour obtenir (1), il suffit de montrer que $B^+A^+ABB^+A^+ = B^+A^+$.
On a

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E = R(B^*) \oplus N(B) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*),$$

où $B_1 \in B(R(B^*), R(B))$ est inversible
Dans ce cas on obtient

$$B^+ = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : G = R(B) \oplus N(B^*) \Longrightarrow E = R(B^*) \oplus N(B).$$

D'autre part on a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : G = R(B) \oplus N(B^*) \Longrightarrow F = R(A) \oplus N(A^*).$$

Cela implique que

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^* D^+ & 0 \\ A_2^* D^+ & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(A^*) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*),$$

où $D = A_1 A_1^* + A_2 A_2^*$ est positif dans $R(A)$. .
Comme

$$AA^* = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors $R(D) = R(AA^*) = R(A)$ car $R(A)$ est fermé. Donc : $D : R(A) \longrightarrow R(A)$ est opérateur positif surjectif. D'où il est inversible. Par conséquent

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^* (D)^{-1} & 0 \\ A_2^* (D)^{-1} & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(A^*) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*).$$

Donc

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E = R(B^*) \oplus N(B) \Longrightarrow F = R(A) \oplus N(A^*) \text{ ....(1)}$$

$$(AB)^+ = \begin{bmatrix} (A_1 B_1)^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N({}^{A}*) \Longrightarrow E = R(B^*) \oplus N(B)\text{........(2)}$$

Comme $R(A^*AB) \subset R(B)$, alors par l'application du théorème précédent on a :
$AB(AB)^+ = ABB^+A^+$ alors de (1)et (2) on obtient :

$$A_1 B_1 (A_1 B_1)^+ = A_1 B_1 B_1^{-1} A_1^* D^{-1} = A_1 B_1 A_1^* D^{-1}$$

Alors

$$A_1 B_1 (A_1 B_1)^+ A_1 B_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1.$$

Il s'ensuit

$$A_1 B_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1,$$

$$A_1 B_1 B_1^{-1} = A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1 B_1^{-1},$$

$$A_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1.$$

D'autre part on a :

$$
\begin{aligned}
B^+A^+ABB^+A^+ &= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}(A_1A_1^*D^{-1}A_1)^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= B^+A^+
\end{aligned}
$$

Donc $(AB)^+ = B^+A^+$ $\square$