# Table des matières

# Chapitre 3

# Le groupe inverse

## 3.1 Propriétés du groupe-inverse

**Définition 3.1.1.** Soit $A \in \mathrm{B}(H)$. Le groupe inverse de $A$ est l'opérateur $B \in \mathrm{B}(H)$ vérifiant :

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \\ AB = BA \end{cases}$$

Si $A$ admet un groupe inverse, alors on dit que $A$ est groupe inversible et on le note par $B = A^{\#}$.

**Remarque 3.1.1.** *Si $A^{\#}$ existe, alors*

1. *$A^{\#}$ est un inverse généralisé de $A$.*
2. *$R(A)$ fermé.*
3. *$AA^{\#}$ et $A^{\#}A$ sont deux projections tels que $R(AA^{\#}) = R(A^{\#}A) = R(A)$ et $N(AA^{\#}) = N(A^{\#}A) = N(A)$.*
4. *$A = AA^{\#}A = AA^2A^{\#}$. et $A^{\#} = A^{\#}AA^{\#} = (A^{\#})^2A$.*

**Proposition 3.1.1.** *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors $A$ est un EP opérateur si et seulement si $A^{\#}$ existe et $A^{\#} = A^{+}$.*

*Preuve.* ($\Rightarrow$). Supposons que $A$ EP opérateur, i.e. $AA^{+} = A^{+}A$ donc $A^{\#} = A^{+}$.
($\Leftarrow$). Maintenant si $A^{\#} = A^{+}$, alors $AA^{+} = A^{+}A$. Par conséquent $A$ est EP. $\square$

**Théorème 3.1.2.** *Soit $A \in \mathrm{B}(H)$ à image fermée. alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A^{\#}$ existe et il est unique,*
2. *$H = R(A) \oplus N(A)$,*
3. *$R(A^2) = R(A)$ et $N(A^2) = N(A)$,*
4. *$\exists U, W \in \mathrm{B}(H)$ tels que $A^2U = A$ et $WA^2 = A$.*

*Preuve.* $1 \Rightarrow 2$. Supposons que $A^{\sharp}$ existe, alors $AA^{\sharp} = A^{\sharp}A$. Comme $AA^{\sharp}$ est une projection, on déduit que

$$H = R(AA^{\sharp}) \oplus N(AA^{\sharp}).$$

On a $R(AA^{\sharp}) = R(A)$ et $N(AA^{\sharp}) = N(A^{\sharp}A) = N(A)$. Donc

$$H = R(A) \oplus N(A).$$

$2 \Rightarrow 3$. Supposons que $H = R(A) \oplus N(A)$, alors

$$A(H) = AR(A) \oplus A(N(A)) = R(A^2).$$

Donc $R(A) = R(A^2)$. Comme $N(A) \subset N(A^2)$, alors il suffit de montrer que $N(A^2) \subset N(A)$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in N(A^2) &\Rightarrow A^2x = 0. \\ &\Rightarrow A(Ax) = 0 \\ &\Rightarrow Ax \in N(A) \cap R(A) \\ &\Rightarrow Ax = 0 \\ &\Rightarrow x \in N(A). \end{aligned}$$

Donc $N(A^2) \subset N(A)$.
$3 \Rightarrow 4$. Supposons que $R(A^2) = R(A)$ et $N(A^2) = N(A)$. alors $R((A^*)^2) = R(A^*)$. Donc

$$R(A) \subset R(A^2) \text{ et } R(A^*) \subset R((A^*)^2)$$

Par l'application du théorème de Douglas, il existe deux opérateurs $U, B \in B(H)$, vérifiant :

$$\begin{cases} A = A^2U \\ A^* = (A^*)^2B \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} A = A^2U \\ A = B^*A^2 = WA^2 \ (W = B^*) \end{cases}$$

$4 \Rightarrow 1$ Posons $B = WAU$ et montons que $A^\# = B$..
Montrons maintenant l'unicité de $A^\#$. Supposons par l'absurde que $A$ possède deux groupe inverses $A_1^\# et A_2^\#$ différents. Comme

$$R(A_1^\# A) = R(A) = R(A_2^\# A),$$

et

$$N(A_1^\# A) = N(A) = N(A_2^\# A).$$

Alors

$$A_1^\# A = A_2^\# A = AA_1^\# = AA_2^\#.$$

Donc

$$A_1^\# = A_1^\# AA_1^\# = A_2^\# AA_1^\# = A_2^\#,$$

Ce qui contredit l'hypothèse $A_1^\# \neq A_2^\#$. □

**Proposition 3.1.3.** *Soient $A, B \in B(H)$. Si $A^\#$ existe, alors on a*

1. $(A^\#)^\# = A$.
2. $(A^*)^\# = (A^\#)^*$.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\ (A^\#)^n = (A^n)^\#$.
4. *Si* $AB = BA$ *alors* $A^\# B = BA^\#$.

*Preuve.* 3- Puisque $A$ et $A^{\#}$ commutent, alors pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$A^n(A^{\#})^n A^n = (AA^{\#}A)^n = A^n;$

$(A^{\#})^n A^n (A^{\#})^n = (A^{\#}AA^{\#})^n = (A^{\#})^n,$

$A^n(A^{\#})^n = (AA^{\#})^n = (A^{\#}A)^n = (A^{\#})^n A^n.$

Donc $(A^{\#})^n = (A^n)^{\#}$.

4- Supposons que $AB = BA$. Alors on a :

$$A^{\#}B = (A^{\#})^2AB = (A^{\#})^2BA = (A^{\#})^2BA^2A^{\#} = (A^{\#})^2ABAA^{\#} = A^{\#}BAA^{\#},$$

et

$$BA^{\#} = BA(A^{\#})^2 = AB(A^{\#})^2 = A^{\#}A^2B(A^{\#})^2 = A^{\#}A^2(A^{\#})^2 = A^{\#}BAA^{\#}.$$

Donc

$$A^{\#}B = BA^{\#}.$$

□

**Remarque 3.1.2.** *Si $A$ et $B$ sont deux opérateurs groupe-inversibles tels que $AB = BA$, alors de la proposition précédente on déduit que :*

$$A^{\#}B = BA^{\#},\ AB^{\#} = B^{\#}A,\ A^{\#}B^{\#} = A^{\#}B^{\#}.$$

**Proposition 3.1.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert et Soient $A \in B(E)$ , $B \in B(F)$. On pose $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors $T$ est groupe-inversible si et seulement si $A$ et $B$ sont groupe-inversibles. Dans ce cas $T^{\#} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#} \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$.*

*Preuve.* Supposons que $T^{\#}$ existe et

$$T^{\#} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$$

Comme

$$\begin{cases} TT^{\#}T = T \\ T^{\#}TT^{\#} = T^{\#} \\ TT^{\#} = T^{\#}T, \end{cases}$$

alors on obtient

$$\begin{cases} AC_1A = A\ , C_1AC_1 = C_1\ , AC_1 = C_1A \\ et \\ BC_4B = B\ , C_4BC_4 = C_4\ , BC_4 = C_4B. \end{cases}$$

Donc $A$ et $B$ sont G-inversibles et de l'unicité du groupe-inverse, on déduit que

$$A^{\#} = C_1 \text{ et } B^{\#} = C_4$$

Inversement. Supposons maintenant que $A^{\#}$ et $B^{\#}$ existe. On pose

$$D = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#} \end{bmatrix} \in B(E \oplus F).$$

Donc

$$TDT = \begin{bmatrix} AA^{\#}A & 0 \\ 0 & BB^{\#}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = T,$$

$$DTD = \begin{bmatrix} A^{\#}AA^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#}BB^{\#} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#} \end{bmatrix} = D,$$

$$TD = \begin{bmatrix} AA^{\#} & 0 \\ 0 & BB^{\#} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\#}A & 0 \\ 0 & B^{\#}B \end{bmatrix} = DT.$$

Par conséquent $T^{\#} = D$.

□

## 3.2 Opérateurs d'ascente et de descente finis.

**Définition 3.2.1.** Soit $A \in B(H)$.

1. On appelle l'ascente de $A$, notée $a(A)$, le plus petit entier naturel $n$ tel que : $N(A^n) = N(A^{n+1})$.

   $$a(A) = asc(A) = \inf\{n \in \mathbb{N} : N(A^n) = N(A^{n+1})\}.$$

   Si un tel entier n'existe pas, on pose $a(A) = \infty$.
2. On appelle la descente de $A$, notée $d(A)$, le plus petit entier naturel $n$ tel que $R(A^n) = R(A^{n+1})$.

   $$d(A) = dsc(A) = \inf\{n \in \mathbb{N} : R(A^n) = R(A^{n+1})\}.$$

   Si un tel entier n'existe pas, on pose $d(A) = \infty$.

**Remarque 3.2.1.** *Si $A \in B(H)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$a(A) < \infty$ et $d(A) < \infty$ ;*
2. *$a(A) = d(A)$;*
3. *Il existe $k \in \mathbb{N}$, $H = N(A^k) \oplus R(A^k)$.*

**Corollaire 3.2.1.** *Soit $A \in B(H)$. Alors*

$$A \text{ est groupe inversible } \Leftrightarrow ind(A) \leq 1,$$

*où $ind(A) = a(A) = d(A)$.*

*Preuve.* Application directe du théorème 3.1.2. □

**Proposition 3.2.1.** *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors on a*

1.
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

2. *$A$ est groupe-inversible si et seulement si $A_1$est inversible.*
   *Dans ce cas $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$*

*Preuve.* 2) $\Rightarrow$. On a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

$\square$

Supposons que $A^{\#}$ existe. On pose

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

Comme

$$\begin{cases} AA^{\#}A = A \\ A^{\#}AA^{\#} = A^{\#} \\ AA^{\#} = A^{\#}A, \end{cases}$$

alors on trouve

$$\begin{cases} A_1C_1A_1 = C_1 \\ C_1A_1C_1 = C_1 \\ A_1C_1 = C_1A_1 \end{cases}$$

On conclut que $A_1$ est G-inversible et donc $ind(A_1) \leq 1$.

Montrons que $A_1$ inversible.

Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ tel que $A(x) = y$. Comme $A$ est G-inversible, alors

$$H = R(A) \oplus N(A),$$

et donc $\exists x_1 \in R(A)$, $\exists x_2 \in N(A)$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Ce qui implique

$$y = A(x) = A(x_1) = A_1(x_1)$$

Donc $A_1$ est surjectif. Par conséquent $d(A_1) = 0$. Puisque $ind(A_1) \leq 1$, alors $a(A_1) = d(A_1) = 0$ et donc $A_1$ inversible.
Inversement. Supposons que $A_1$ inversible et posons

$$C = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} ACA = C \\ CAC = C \\ AC = CA, \end{cases}$$

Donc $A^{\#} = C$.