Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2, AFTOL \Année 2020-2021.

Examen Final
Théorie des inverses Généralisés

Dans tout ce qui suit E, F deux espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{K}$ et H un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soient $A \in B(E,F)$, $B \in B(F,E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *B est un inverse intérieur de A,*
(2) *$(BA)^2 = BA$ et $N(BA) = N(A)$,*
(3) *$(BA)^2 = BA$ et $R(A) \cap N(B) = \{0\}$.*

Exercice 2. *Soient $A, C \in B(H)$ tel que C inversible.*

(1) Supposons que $C^{-1}AC$ est groupe-inversible. Montrer l'existence de deux opérateurs $V, W \in B(H)$, tels que

$$A^2CVC^{-1} = A \text{ et } CWC^{-1}A^2 = A.$$

(2) Montrer que $A^{\#}$ existe si et seulement si $C^{-1}AC$ est groupe-inversible.

Exercice 3. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée.*

(1) *Montrer que*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A).$$

(2) *Montrer que $C = A_1^*A_1 + A_3^*A_3$ est inversible dans $R(A^*)$.*
(3) *Trouver A^+*
(4) *Supposons que A_1 est inversible dans $R(A^*)$.*
   (a) *Vérifier que $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ A_3A_1^{-2} & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A)$.*
   (b) *Montrer que A est auto-adjoint si et seulement si $A^*A^+A^+A = A^{\#}A$*

Exercice 4. *Soient $A, B \in B(H)$. On suppose que AB est un EP opérateur. Montrer que $B[(AB)^+]^2A$ est l'inverse de Drazin de BA d'ordre 2.*