Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2, AFTOL \Année 2020-2021.

Correction de l'examen Final
Théorie des inverses Généralisés

Corrigé de l'exercice 3.

1) on a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A).$$

On a $A_2 = A \setminus N(A) : N(A) \to R(A^*)$ et donc $A_2 = 0$.

De même $A_4 = A \setminus N(A) \to N(A)$ et donc $A_4 = 0$.

2) on a l'opérateur $C = A_1^* A_1 + A_3^* A_3$ positif et comme $R(A)$ fermé, alors $R(C) = R(A^*A) = R(A^*)$. ce qui implique que C est surjectif.
Donc C est inversible car il est surjectif et positif.

3) Puisque $A^+ = (A^*A)^+ A^*$, alors on a

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{..........(1)}$$

$$(A^*A)^+ = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et donc

$$A^+ = \begin{bmatrix} C^{-1}A_1^* & C^{-1}A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{.........(2)}$$

4) Supposons que A_1 inversible. a) Posons

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ A_3 A_1^{-2} & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A).$$

On peut facilement vérifier que

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \\ AB = BA \end{cases}$$

Donc $A^\# = B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ A_3 A_1^{-2} & 0 \end{bmatrix}$ ....(3).

b) Supposons que A est auto-adjoint, alors A est EP et donc $A^+ = A^\#$. Par conséquent

$$A^*A^+A^+A = AA^\# A^\# A = A^\# AA^\# A = A^\# A.$$

Inversement. Supposons que $A^*A^+A^+A = A^\# A$. De (1), (2) et (3) on obtient

$$A^*A^+A^+A = \begin{bmatrix} A_1^*C^{-1}A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^\# A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_3A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} A_1^*C^{-1}A_1^* = I....(4) \\ A_3A_1^{-1} = 0........(5) \end{cases}$$

De (5), on déduit que $A_3 = 0$. Donc $C = A_1^*A$ et de (4), on trouve $A_1^* = A$. D'où A est auto-adjoint.

Corrigé de l"exercice (4).

On suppose que AB est un EP opérateur. Donc $AB(AB)^+ = (AB)^+AB$.
Montrons que $B[(AB)^+]^2A$ est l'inverse de Drazin de BA d'ordre 2 (il suffit de vérifier la définition du Drazin)

$BAB[(AB)^+]^2A = AB[(AB)^+]^2ABA.$
$B[(AB)^+]^2ABAB[(AB)^+]^2A = B[(AB)^+]^2A.$
$(BA)^3B[(AB)^+]^2A = B(AB)^3[(AB)^+]^2A = (BA)^2$ car $(AB)^3[(AB)^+]^2 = AB.$