Corrigé de l'exercice 1

(1) $\Rightarrow$ (2).(voir le cours).
(2) $\Rightarrow$ (3). Montrons que $(BA)^2 = BA$.
De (2), on déduit que AB une projection sur $R(A)$. Donc on trouve

$$(BA)^2 = B(ABA) = BA.$$

Montrons que $N(BA) = N(A)$.
Puisque $N(A) \subset N(BA)$, alors il suffit de prouver que $N(BA) \subset N(A)$. Comme AB est une projection, alors

$$W = N(AB) \oplus R(AB) = N(AB) \oplus R(A)$$

Soit $x \in N(BA)$, alors $BAx = 0$. Donc

$$\begin{cases} Ax \in N(B) \subset N(AB) \\ et \\ Ax \in R(A) \end{cases}$$

Ce qui implique que $Ax \in N(AB) \cap R(A) = \{0\}$. Alors Ax. Donc $x \in N(A)$. D'où $N(BA) = N(A)$.
(3) $\Rightarrow$ (4). Soit $x \in R(A) \cap N(B)$, alors

$$\begin{cases} \exists z \in V; x = Az \\ et \\ Bx = 0 \end{cases}$$

Donc $BAz = 0$. On déduit que $z \in N(BA) = N(A)$. Par conséquent $x = Az = 0$.
(4) $\Rightarrow$ (1). On a $(BA)^2 = BA$ et $R(A) \cap N(B) = \{0\}$. Montrons que $N(BA) = N(A)$.
Soit $x \in N(BA)$, alors $BAx = 0$. Donc

$$\begin{cases} Ax \in N(B) \\ et \\ A(x) \in R(A) \end{cases} .$$

Ceci implique que $A(x) \in N(B) \cap R(A) = \{0\}$. Alors $A(x) = 0$. Par conséquent $x \in N(A)$
Montrons $ABA = A$.
Soit $x \in V$. comme BA une projection dans V, alors $V = N(BA) \oplus R(BA) = N(A) \oplus R(BA)$. Suivant cette décomposition, $\exists x_1 \in N(A), \exists x_2 \in R(BA)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors

$$\begin{aligned} ABA(x) &= ABA(x_1 + x_2) \\ &= ABA(x_2) \quad car\ x_2 \in R(BA). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $x_2 \in R(BA)$, il exists $z \in V$ tel que $x_2 = BA(z)$. Alors

$$ABA(x_2) = ABABA(z) = ABA(z) = A(x_2) = A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2) = A(x).$$

Donc $ABA(x) = A(x)$.

Corrigé de l'exercice 3
($\Rightarrow$). Supposons $G_2G_1T_1T_2G_2G_1 = G_2G_1$.
On a
$$(T_2G_2G_1T_1)^2 = T_2(G_2G_1T_1T_2G_2G_1)T_1 = T_2G_2G_1T_1.$$
Donc $T_2G_2G_1T_1$ est une projection.
($\Leftarrow$). Supposons $T_2G_2G_1T_1T_2G_2G_1T_1 = T_2G_2G_1T_1 = T_2G_2G_1T_1$. Cela nous donne
$$G_2(T_2G_2G_1T_1T_2G_2G_1T_1)G_1 = G_2(T_2G_2G_1T_1)G_1.$$
Comme $G_2T_2G_2 = G_2$ et $G_1T_1G_1 = G_1$, on conclut que
$$G_2G_1T_1T_2G_2G_1 = G_2G_1.$$
La preuve de (2) est analogue à la preuve de (1).