Corrigé de l'exercice 1, série 2

1) Comme P est une projection orthogonale sur $R(A)$, alors $R(P) = R(A)$ et $AP = A$. A EP alors $R(A^*) = R(A)$. Donc on obtient

$$R(AP) = AR(P) = AR(A) = R(A^2).$$

Puisque A est EP, alors il est groupe-inversible, par conséquent $R(A^2) = R(A)$. D'où $R(AP) = R(A)$ et donc AP est à image fermée.
Puisque $R(AP)$ est fermé, alors $(AP)^+$ existe.
2) Montrons que AP est EP. Il suffit de prouver que $R(AP) = R(AP)^*$.
Comme A EP et $AP = A$, on trouve

$$R(AP)^* = R(P^*A^*) = R(PA^*) = PR(A^*) = PR(A) = R(PA) = R(A) = R(AP)\ .$$

Donc AP est EP.
3) Montrons maintenant que $(AP)^+ = P^+A^+ = PA^+$.
On a

$$R(A^*AP) = A^*R(AP) = A^*R(A) = R(A^*A) = R(A^*) = R(A) = R(P).$$

Et

$$R(PP^*A^*) = R(P^2A^*) = R(PA^*) = R(A^*).$$

Il s'ensuit du Théorème 2.4.15 que $(AP)^+ = P^+A^+ = PA^+$.

Corrigé de l'exercice 3
$1 \Longrightarrow 2$.
Si A normal à image fermée, alors $H = R(A) \oplus N(A)$. Donc $a(A) = d(A) \leq 1$. On a

$$AA^*A^+ = A^*AA^+ = (AA^+A)^* = A^*.$$

$2 \Longrightarrow 1$. Supposons que $AA^*A^+ = A^*$ et $a(A) < \infty$. Puisque $H = R(A) \oplus N(A^*)$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

Posons $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*0$, alors $D \geq 0$ et $R(D) = R(AA^*) = R(A)$. Donc D un opérateur positif surjectif. Par conséquent il est inversible dans $R(A)$.
D'autre part on a :

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

De $AA^*A^+ = A^*$, on obtient

$$\begin{bmatrix} DA_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} DA_1^*D^{-1} = A_1^*\,(1) \\ A_2^* = 0 \Rightarrow A_2 = 0. \end{cases}$$

Montrons que A_1 est normal.
Puisque $A_2 = 0$, alors $D = A_1 A_1^*$. Ce qui implique que $A_1 A_1^* D^{-1} = I$. On déduit que A_1 est inversible à droite et donc l'opérateur est surjectif. Par conséquent $d(A_1) = 0$. D'où $a(A_1) = d(A_1) = 0$, car $a(A_1) = a(A) < \infty$. . on conclut que A_1 est inversible.
De la relation (1), on trouve :

$$\begin{aligned} DA_1^* D^{-1} = A_1^* &\iff DA_1^* D^{-1} D = A_1^* D; \\ &\iff DA_1^* = A_1^* D, \\ &\iff A_1 A_1^* A_1^* = A_1^* A_1 A_1^*, \\ &\iff A_1 A_1^* = A_1^* A_1; \\ &\iff A_1 normal. \end{aligned}$$

Donc A est normal.

(1) $\Longrightarrow$ (3).

Puisque A normal à image fermée, alors $d(A) < \infty$. et

$$A^+ A^* A = A^+ A A^* = A^*, \text{ car } R(A^+ A) = R(A^*).$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). On a $H = R(A^*) \oplus N(A)$. Donc

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A),$$

où $D = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 \in B(R(A^*))$ inversible.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A),$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} A_1^* & D^{-1} A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A).$$

De $A^+ A^* A = A^*$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} D^{-1} A_1^* D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} D^{-1} A_1^* D = A_1^* \, (*) \\ A_3^* = 0 \Rightarrow A_3 = 0. \end{cases}$$

Alors $D = A_1^* A_1 \Longrightarrow D^{-1} A_1^* A_1 = I$. Donc A_1 injectif, car il est inversible à gauche. D'où $d(A_1) = a((A_1)) = 0$. On conclut que A_1 inversible. De la relation (*), on déduit que

$$\begin{aligned} D^{-1} A_1^* D = A_1^* &\iff DD^{-1} A_1^* D = DA_1^*; \\ &\iff A_1^* D = DA_1^*, \\ &\iff A_1^* A_1^* A_1 = A_1^* A_1 A_1^*, \\ &\iff A_1^* A_1 = A_1 A_1^*; \\ &\iff A_1 normal. \end{aligned}$$

On conclut que A est normal.

Corrigé de l'exercice 2

1) Comme $A = A^*$, alors $H = R(A) \oplus N(A)$ S.D.$\perp$. Donc

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A),$$

avec A_1 inversible dans $R(A)$.
Donc on obtient

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A).$$

Par conséquent

$$I - A^+A + A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Comme A_1 et I sont inversibles, alors $I - A^+A + A$ l'est aussi.

2)Puisque $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$ et $AA^+ = A^+A$, car A est auto-adjoint, alors On obtient :

$(I - A^+A + A)(I - A^+A + A^+) = I - A^+A + A^+ - A^+A + A^+AA^+A + A^+AA^+ + A - AA^+A + AA^+ = I - A^+A + AA^+ = I$

De même

$(I - A^+A + A^+)(I - A^+A + A) = I - A^+A + A^+ - A^+A + A^+AA^+A + A^+AA + A^+ - A^+A^+A + A^+A = I - A^+A + AA^+ = I$

3) On a AA^* est auto-adjoint et $(AA^*)^+$ existe car $R((AA^*)^+)$ fermé. donc $(AA^*)^+AA^* = (A^*)^+A^+AA^* = (A^*)^+A^* = (A^+)^*A^* = (A^+A)^* = A^+A$.
Par l'application de la question 1, on déduit que l'opérateur $I - (AA^*)^+AA^* + AA^*$ est inversible et donc $I - AA^+ + AA^*$ est inversible.
Dans ce cas $(I - AA^+ + AA^*)^{-1} = I - (AA^*)^+AA^* + (AA^*)^+ = I - AA^+ + (A^*)^+A^+ = (A^+)^*A^+$.