# Table des matières

# Introduction

On constate que beaucoup de problèmes dans la théorie des opérateurs ou dans d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre, l'analyse numérique, la théorie spectrale..., sont fortement liés à la notion d'inversibilité usuelle des matrices ou des opérateurs, raison pour laquelle, certains mathématiciens ont introduit de nouvelles notions d'inversibilité qui sont utiles à la résolution des problèmes dont la notion d'inversibilité usuelle n'y est pas vérifiée. Parmi eux, nous citons J. Von Neumann, I. Kaplansky, M. Z Nashed, C. R. Cardus, J. J. koliha ...et bien d'autres.
En 1936, J. Von Neumann [38] a introduit la notion d'inverse généralisé pour les éléments d'un anneau, plus tard et plus précisément en 1948, I. Kaplansky [24] a donné une extention de cette notion pour les algébres. Enfin la notion d'inverse de Moore-Penrose ou Pseudo-inverse a été établie indépendament par E. H. Moore [32], en 1922 et R. [34] Penrose en 1955.
Ce cours s'adresse aux étudiants de Master 2, spécialité analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs linéaires. Il leurs propose une formation avancée dans la théorie des inverses généralisés. Son objectif principal est d'initier les étudiants à la recherche dans la théorie des opérateurs et plus particulièrement, dans la théorie des inverses généralisés. C'est la raison pour laquelle à la plupart des énoncés du cours, on propose une preuve complète, dont on peut s'inspirer pour résoudre la collection d'exercices donnée dans Le dernier chapitre. J'ai indiqué à la fin de ce cours une liste bibliographique. Plusieurs titres de cette liste sont la base de cette rédaction.

# Chapitre 1

# Inverse généralisé

Dans ce chapitre $E$ et $F$ sont deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$ et $B(E,F)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de $E$ dans $F$ . Le noyau d'un opérateur $A \in B(E,F)$ est le sous-espace défini par $\mathcal{N}(A) = \{x \in E \ : \ Ax = 0\}$ et son image est le sous-espace $\mathcal{R}(A) = \{Ax \ : \ x \in E\}$. Il est clair que $\mathcal{N}A)$ est un sous-espace fermé de $E$, alors que $\mathcal{R}(A)$ est un sous-espace de $F$ non nécessairement fermé.
Le Lemme qui suit est utile pour démontrer les résultats qui vont suivre.

**Lemme 1.0.1.** *Soit $P \in B(H)$ une projection, alors $R(P)$ est fermé et en plus on a*

$$H = R(P) \oplus N(P)$$

*Preuve.* Montrons que $R(P)$ fermé.
Soit $(y_n)_n \in R(P)$ tel que $y_n \to y \in B(H)$. Alors

$$P(y_n) = y_n \to y.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} P(y_n) = P(y) = y.$$

Alors $y \in R(P)$ et donc $R(P)$ fermé.
Comme $P$ est une projection, alors $P = P^2$ et donc $(I-P)P = 0$.
Ce qui implique :

$$\mathcal{R}(P) \subset N(I-P)$$

Il reste à montrer que $N(I-P) \subset R(P)$
Soit

$$\begin{aligned} x \in N(I-P) &\Rightarrow (I-P)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = P(x) \\ &\Rightarrow x = PP(x) \\ &\Rightarrow x = P(y) \in R(P) \\ &\Rightarrow x \in R(P). \end{aligned}$$

Donc :

$$N(I-P) \subset R(P)$$

d'où

$$N(I-P) = R(P)$$

Maintenant, montrons que $H = N(P) \oplus R(P)$
on a $x = P(x) + (I-P)(x)$
comme $P(x) \in R(P)$ et $(I-P)(x) \in R(I-P) = N(P)$.
Donc :

$$x \in R(P) \cap N(P) = 0,$$

alors :

$$H = R(P) \oplus N(P).$$

□

## 1.1 Inverse intérieur

**Définition 1.1.1.** On dit que l'opérateur $B \in B(F,E)$ est un inverse intérieur de $A$ si $ABA = A$.

**Proposition 1.1.1.** *(propriétés de l'inverse intérieur). Si $B \in B(F,E)$ un inverse intérieur de $A$, alors :*

1. *$AB$ et $BA$ sont deux idempotents (projections)*
2. *$R(AB) = R(A)$ et $R(BA) \subset R(B)$.*
3. *$N(BA) = N(A)$ et $N(B) \subset N(AB)$.*
4. *$E = N(BA) \oplus N(BA) = N(A) \oplus R(BA)$.*
5. *$F = N(AB) \oplus R(AB) = N(AB) \oplus R(A)$.*
6. *$R(A) \cap N(B) = \{0\}$.*

*Preuve.* 1. On a

$$(AB)^2 = (ABA)B = AB.$$
$$(BA)^2 = B(ABA) = BA.$$

2. Comme $R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A)$, alors $R(A) \subset R(AB) \subset R(A)$. Donc $R(AB) = R(A)$.
3. Comme $N(A) \subset N(BA) \subset N(ABA) = N(A)$. alors $N(A) \subset N(BA) \subset N(A)$. D'où $N(BA) = N(A)$.
4. Comme AB une projection d'image $R(A)$ et $BA$ une projection de noyau $N(A)$, alors

$$\begin{aligned} E &= N(BA) \oplus R(BA) \\ &= N(A) \oplus R(BA). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F &= N(AB) \oplus R(AB) \\ &= N(AB) \oplus R(A). \end{aligned}$$

5. Soit $y \in R(A) \cap N(B)$, alors $y \in R(A)$ et $y \in N(B)$. $y \in R(A), \exists x \in E$ *tel que* $Ax = y$. Donc $y = Ax = ABA(x) = ABy = A(0) = 0$, car $y \in N(B)$.

□

## 1.2 Inverse extérieur

**Définition 1.2.1.** On dit que l'opérateur $C \in B(F, E)$ est un inverse extérieur de $A$ si $CAC = C$.

**Proposition 1.2.1.** *(propriétés de l'inverse extérieur). Si $C \in B(F, E)$ un inverse extérieur de $A$, alors :*

1. *$AC$ et $CA$ sont deux idempotents (projections)*
2. *$R(CA) = R(C)$ et $N(A) \subset N(CA)$.*
3. *$R(AC) \subset R(A)$ et $N(AC) = N(C)$.*
4. *$E = N(CA) \oplus R(C),\ F = N(C) \oplus R(AC)$*

*Preuve.* 1. On a $(AC)^2 = A(CAC) = AC$ et $(CA)^2 = (CAC)A = CA$.

2. Comme $R(C) = R(CAC) \subset R(CA) \subset R(C)$, donc $R(CA) = R(C)$.
3. Comme $N(C) \subset N(AC) \subset N(CAC) = N(C)$, donc $N(AC) = N(C)$.
4. Comme CA est une projection d'image $R(C)$ et AC est une projection de noyau $N(C)$, alors

$$\begin{aligned} E &= N(CA) \oplus R(CA) \\ &= N(CA) \oplus R(C) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F &= N(AC) \oplus R(AC) \\ &= N(C) \oplus R(AC) \end{aligned}$$

□

## 1.3 Inverse généralisé

**Définition 1.3.1.** $S \in B(F, E)$ est un inverse généralisé de $A$ si

$$\begin{cases} ASA = A, \\ SAS = S. \end{cases}$$

.

**Proposition 1.3.1.** *Si $S \in B(F, E)$ un inverse généralisé de $A$, alors :*

1. *$(AS)^2 = AS$ et $(SA)^2 = SA$*
2. *$R(AS) = R(A), N(AS) = N(S)$*
3. *$R(SA) = R(S), N(SA) = N(A)$*
4. *$E = N(A) \oplus R(S), F = N(S) \oplus R(A)$*

*Preuve.* La preuve découle des deux propositions précédentes. □

**Exemple 1.3.1.** 1. Soit $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$A(x, y, z) = (x, 0, 0),$$

et soit $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$B(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Alors pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$ABA(x, y, z) = AB(x, 0, 0) = A(x, 0, 0) = (x, 0, 0) = A(x, y, z).$$

Donc B est un inverse intérieur de A.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Par un calcul simple, on trouve $CAC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$ . Donc C un inverse extérieur de A. De plus $ACA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Donc C un inverse intérieur de A. Par conséquent C un inverse généralisé de A.
3. Si $A \in \mathcal{B}(E, F)$ est inversible, alors $S = A^{-1}$ est l'unique inverse généralisé de A.

**Théorème 1.3.2.** *$A \in B(E, F)$ admet un inverse généralisé si et seulement si $R(A)$ fermé et $N(A))$ et $R(A)$ possèdent des supplémentaires topologiques dans $E$ et $F$, respectivement.*

*Preuve.* $(\Rightarrow)$. Supposons que $A$ admet un inverse généralisé $S \in B(F, E)$, alors $AS$ est une projection borné sur $R(A)$, donc $R(A)$ fermé et on a

$$\begin{aligned} F &= R(AS) \oplus N(AS) \\ &= R(A) \oplus N(AS) \end{aligned}$$

Alors $R(A)$ possède un supplémentaire topologique dans $F$. De même on a

$$\begin{aligned} E &= N(SA) \oplus R(SA) \\ &= N(A) \oplus R(SA) \end{aligned}$$

Donc $N(A)$ admet un supplémentaire topologique dans E.
$(\Leftarrow)$. Supposons que $R(A)$ fermé, $X, Y$ sont deux sous espaces vectoriels fermés dans $E, F$ respectivement, tels que

$$E = N(A) \oplus X \text{ et } F = Y \oplus R(A)$$

Posons $\tilde{A}$ la restriction de $A$ sur $X$.

$$\begin{aligned} \tilde{A} : X &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto \tilde{A}(x) = A(x). \end{aligned}$$

- montrons que $\tilde{A}$ est injectif.
  Soit $x \in X$ tq $\tilde{A}(x) = 0$ alors $A(x) = 0$ donc $x \in N(A)$. Comme $x \in X$ alors $x \in X \cap N(A) = \{0\}$. Donc x = 0, d'où A est injectif.
- Montrons que $\tilde{A}$ est surjectif (i.e. $\forall y \in R(A), \exists\, x \in X$ tq $y = \tilde{A}(x)$).
  Soit $y \in R(A)$ alors il existe $z \in V$ tq $A(z) = y$. Puisque
  $$V = N(A) \oplus X,$$
  alors il existe $x_1 \in N(A)$ et $x_2 \in X$ tq $z = x_1 + x_2$. Il s'ensuit que
  $$y = A(z) = A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = A(x_2) = \tilde{A}(x_2).$$
  Donc $\tilde{A}$ est surjectif. D'où $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X, R(A))$ est bijectif et comme X et $R(A)$ sont fermés, alors par l'application du théorème du graphe fermé on obtient $\tilde{A}^{-1}$ inversible et $\tilde{A}^{-1} \in B(R(A), X)$.

Posons $S : F \longrightarrow E$
$$S(x) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(x) & /si \;\; x \in R(A) \\ 0 & /si \;\; x \in Y \end{cases}$$
Montrons que $ASA = A$.
Soit $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ ou' $x_1 \in N(A)$ et $x_2 \in X$.
$$\begin{aligned} ASA(x) &= ASA(x_1 + x_2) \\ &= ASA(x_2) \qquad car \;\; x_1 \;\in N(A) \\ &= AS\tilde{A}(x_2) \qquad car \;\; \tilde{A} \; est \; la \; restriction \;\; de \;\; A \; sur \; X \\ &= A\tilde{A}^{-1}\tilde{A}(x_2) \qquad car \; \tilde{A}(x_2) \in R(A) \\ &= A(x_2) \\ &= A(x_1 + x_2) = A(x). \end{aligned}$$
alors S est un inverse intérieur de $A$.
Montrons que SAS = S.
Soit $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ suivant la décomposition $F = Y \oplus R(A)$, donc
$$\begin{aligned} SAS(x) &= SAS(x_1 + x_2) \\ &= SAS(x_2) \qquad car \quad x_1 \;\; \in Y \;\;, donc \;\; S(x_1) = 0 \\ &= SA\tilde{A}^{-1}(x_2) \qquad car \; x_2 \in R(A) \\ &= S\tilde{A}\tilde{A}^{-1}(x_2) \qquad car \; \tilde{A}^{-1}(x_2) \in X \\ &= S(x_2) \\ &= S(x_1 + x_2) = S(x). \end{aligned}$$
Alors S est un inverse extérieur de $A$. Donc $S$ est un inverse généralisé de $A$. □

**Remarque 1.3.1.** *1. En dimension finie tout opérateur admet un inverse généralisé.*

*2. L'inverse généralisé n'est pas unique. Il suffit de voir l'exemple suivant*

**Exemple 1.3.2.** Soit le shift à gauche défini sur l'espace $l^2(\mathbb{N})$ par :
$$\begin{aligned} S_l : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) &\longmapsto (x_2, x_3, ...). \end{aligned}$$

Considérons les deux opérateurs linéaires suivants :

$$\begin{aligned} S_r : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) \quad &\longmapsto (0, x_1, x_2, ...), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, ...) \quad &\longmapsto (x_1, x_1, x_2 ...). \end{aligned}$$

Alors pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l^2(\mathbb{N})$ on a :

$$S_l S_r S_l(x_1, x_2, ...) = S_l(x_1, x_2, ...),$$

et

$$S_r S_l S_r(x_1, x_2, ...) = S_r(x_1, x_2, ...).$$

Donc $S_r$ est un inverse généralise de $S_l$ et on a aussi :

$$S_l T S_l(x_1, x_2, ...) = S_l T(x_2, x_3, ...) = S_l(x_2, x_2, x_3 ...) = (x_2, x_3, ...) = S_l(x_1, x_2, ...),$$

et

$$T S_l T(x_1, x_2, ...) = T S_l(x_1, x_1, x_2 ...) = T(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_1, x_2 ...) = T(x_1, x_2, ...).$$

Donc $T$ un autre inverse généralisé de $S_l$ tel que $S_r \neq T$.

# Chapitre 2

# L'inverse de Moore-Penrose

Dans ce chapitre $H$ un espace de Hilbert.

## 2.1 Sur l'image d'un opérateur linéaire borné

**Théorème 2.1.1.** (*Douglas 1966*) *Soit $A, B \in B(H)$, alors les propriétés suivantes sont équivalantes :*

**(a)** $R(A) \subseteq R(B)$.

**(b)** $\exists\, \lambda > 0,\ AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.

**(c)** $\exists\, C \in B(H)$ *tq :* $A = BC$.

*Preuve.* • $a \Longrightarrow c$.

Supposons $R(A) \subseteq R(B)$.

Soit $B_0$ la restriction de $B$ sur $N(B)^\perp$.

$$\begin{aligned} B_0 : N(B)^\perp &\longrightarrow R(B) \\ x \quad &\longmapsto B_0(x) = B(x) \end{aligned}$$

$B_0$ est un opérateur linéaire borné.

– $B_0$ est injectif car $\forall\, x \in N(B)^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} B_0(x) = 0 &\Longrightarrow B(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in N(B) \\ &\Longrightarrow x \in N(B) \cap N(B)^\perp \\ &\Longrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Comme $B_0$ est injectif et fermé.

Alors $B_0^{-1} : R(B) \longrightarrow N(B)^\perp$ est un opérateur fermé. Posons $C = B_0^{-1}A$, puisque $R(A) \subseteq R(B)$. Alors

$$C : H \longrightarrow N(B)^\perp.$$

Comme $C$ fermé, $H$ et $N(B)^\perp$ sont deux espaces de Banach alors $C$ est borné (d'après le théorème du graphe fermé).

Donc $C = B_0^{-1}A \Longrightarrow A = B_0C = BC$ car $R(C) \subset N(B)^\perp$.

- $c \Longrightarrow b$.
  Supposons $\exists\, C \in B(H)$ tq $A = BC$ donc $A^* = C^*B^*$.
  Pour $x \in H$ :

$$\begin{aligned}
\langle AA^*x, x\rangle &= \|A^*x\|^2 \\
&= \|C^*B^*x\|^2 \\
&\leq \|C^*\|^2\|B^*x\|^2 \\
&\leq \|C^*\|^2\langle BB^*x, x\rangle.
\end{aligned}$$

  Posons $\lambda = \|C^*\| > 0$ donc $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.
- $b \Longrightarrow a$.
  Supposons $\exists\, \lambda > 0$ tq $AA^* \leq BB^*$.
  Soit l'opérateur $D : R(B^*) \longrightarrow R(A^*)$ défini par $\forall\, x \in H, D(B^*(x)) = A^*(x)$.
  En effet $\forall\, y \in R(B^*), \exists\, x \in H$ tq $y = B^*(x) \Longrightarrow D(y) = D(B^*(x)) = A^*(x)$. Donc $DB^* = A^*$.
  $D$ est linéaire.
  Montrons que $D$ est borné.
  Soit $y \in R(B^*), \exists\, x \in H$, tq $y = B^*(x)$

$$\begin{aligned}
\|Dy\|^2 &= \|DB^*(x)\|^2 \\
&= \|A^*x\|^2 \\
&= \langle AA^*x, x\rangle \\
&\leq \lambda^2\langle BB^*x, x\rangle \\
&\leq \lambda^2\|B^*x\|^2.
\end{aligned}$$

  $\|Dy\|^2 \leq \lambda^2\|y\|^2 \Longrightarrow \|D(y)\| \leq \lambda\|y\|$ et $y > 0$. Donc $D$ est borné sur $R(B^*)$.
  Donc par l'application du théorème de prolongement par continuté, il existe $\tilde{D}$ un opérateur unique linéaire borné tq :

$$\tilde{D} : \overline{R(B^*)} \longrightarrow R(A^*) \text{ et } \tilde{D}(x) = D(x) \ \text{ pour } x \in \overline{R(B^*)} \text{ et } \|\tilde{D}\| = \|D\|.$$

  Donc $DB = A^*$.
  Comme $H = \overline{R(B^*)} \oplus R(B^*)^{\perp}$.
  Posons : $S : H \longrightarrow H$

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{D}(x) & \text{si } x \in \overline{R(B^*)}. \\ 0 & \text{si } x \in R(B^*)^{\perp}. \end{cases}$$

  $S$ est un opérateur linéaire borné et $SB^* = DB^* = A^*$, alors $BS^* = A$. Donc $R(A) = R(BS^*) \subset R(B)$.

$\square$

**Remarque 2.1.1.** *Soit $T \in B(H)$, alors $\mathcal{R}(T)$ n'est pas toujours fermé. Il suffit de voir l'exemple suivant :*

**Exemple 2.1.1.**

$$\begin{array}{rccc}
T: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\
& x = (x_1, x_2, \cdots) & \longmapsto & T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)
\end{array}$$

Soit $x_n(j) \in l^2(\mathbb{N})$ une suite telle que :

$$x_n(j) = \begin{cases} 1 & sij \leqslant n \\ 0 & sij > n \end{cases}$$

Alors $T(x_n) \in R(T)$ et

$$Tx_n(j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & sij \leqslant n \\ 0 & sij > n \end{cases}$$

Il est clair que $(Tx_n)$ converge vers $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, mais $y \notin R(T)$. Donc $R(T)$ n'est pas fermé.

**Théorème 2.1.2.** *Soient $A, B \in B(H)$. Alors on a :*

(i) $R(A) = R((AA^*)^{\frac{1}{2}})$.

(ii) $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$.

(iii) *$R(A)$ fermé si et seulement si $R(AA^*)$ fermé. Dans ce cas $R(A) = R(AA^*)$,*

(iv) *$R(A)$ fermé si et seulement si $R(A^*)$ fermé.*

*Preuve.* $(i)$ On a $AA^* = (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}}$. Alors

$$\begin{cases} AA^* \leq (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ et \\ (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}} \leq AA^*. \end{cases}$$

En vertu du théorème précédent, on obtient

$$\begin{cases} R(A) \subset R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) \\ et \\ R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) \subset R(A). \end{cases}$$

Donc $R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A)$.
$(ii)$ Soit $T \in B(H)$ défini par :

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H.$$

$R(T) = R(A) + R(B)$. On a

$$T^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \; TT^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; et \; (TT^*)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors $R(TT^*)^{\frac{1}{2}} = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$. D'après (i), $R(T) = (R(TT^*)^{\frac{1}{2}})$. Donc

$$R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}).$$

$(iii)$ Supposons que $R(A)$ est fermé, alors

$$H = R(A) \oplus R(A)^{\perp} = R(A) \oplus N(A^*). \text{ D'autre part, on a}$$
$$H = \overline{R(A^*)} \oplus \overline{R(A^*)}^{\perp} = \overline{R(A^*)} \oplus R(A^*)^{\perp} = \overline{R(A^*)} \oplus N(A).$$

Donc on peut écrire $A$ sous la forme matricielle suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \overline{R(A^*)} \oplus N(A) \to R(A) \oplus N(A^*),$$

$$\begin{aligned} A_1 : A \setminus \overline{R(A^*)} &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto A_1(x) = A(x). \end{aligned}$$

Montrons que $A_1$ bijectif.
$A_1$ injectif
On a $A_1 : A \setminus \overline{R(A)} \longrightarrow R(A)$
Soit $x \in \overline{R(A^*)}$ tel que $A_1 x = 0$, alors $Ax = 0$. Cela nous donne $x \in N(A) \cap \overline{R(A^*)} = \{0\}$.
$A_1$ surjectif.
Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ $y = Ax$. Comme $x \in H$, donc $\exists x_1 \in \overline{R(A^*)}$ et $x_2 \in N(A)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Donc $Ax = Ax_1 = A_1 x_1$.
Par conséquent $A_1$ est un opérateur linéaire borné bijectif sur $\overline{R(A^*)}$. Comme $\overline{R(A^*)}$ et $R(A)$ sont fermés alors $A_1$ est inversible.
On a $A_2 : A \setminus N(A) \longrightarrow R(A)$.
Soit $x \in N(A)$. On a $A_2 x = Ax = 0$. Donc $A_2 = 0$.
On a $A_3 : A \setminus \overline{R(A^*)} \longrightarrow N(A^*)$.
Soit $x \in \overline{R(A^*)}$. On a $A_3 x = Ax \in R(A) \cap N(A^*) = \{0\}$. D'où $A_3 = 0$.
$A_4 : A \setminus N(A) \longrightarrow N(A^*)$. Soit $x \in N(A)$. On a $A_4 x = Ax = 0$. Donc $A_4 = 0$.

$$AA^* = \begin{bmatrix} A_1 A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \to R(A) \oplus N(A^*)$$

Comme $A_1$ est inversible, alors $A_1 A_1^*$ est un opérateur inversible dans $\mathrm{B}(R(A))$, et Puisque $R(AA^*) = R(A_1 A_1^*)$, on obtient $R(AA^*) = R(A)$, d'où $R(AA^*)$ est fermé.
Inversement, Supposons que $R(AA^*)$ est fermé, alors $H = R(AA^*) \oplus N(AA^*)$.
Comme $N(AA^*) = N(A^*)$, on obtient :

$$H = R(AA^*) \oplus N(AA^*) \subset R(A) \oplus N(A^*) \subset H.$$

D'où $R(A) = N(A^*)^\perp$. Donc $R(A)$ est fermé et $R(A) = R(AA^*)$.
$(iv)$ Supposons que $R(A)$ est fermé, alors on a $R(A) = R(AA^*)$, ceci implique que pour tout $x \in H$, il existe $y \in H$ tel que $Ax = AA^*y$, alors $A(x - A^*y) = 0$. Par conséquent $x - A^*y \in N(A)$.

$$x = (x - A^*y) + A^*y \in N(A) + R(A^*)$$

Donc $R(A^*) = N(A)^\perp$ ; alors $\forall x \in \mathcal{H}, x \in N(A) + R(A^*)$. Donc $H = N(A) + R(A^*)$ et comme $N(A) \cap R(A^*) = \{0\}$( car $R(A^*)^\perp = \overline{R(A^*)^\perp} = N(A)$). Par conséquent

$$\begin{aligned} H &= N(A) + R(A^*) \\ &= N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \quad (\textit{somme direct topologique}) \end{aligned}$$

Comme $R(A^*) \subset \overline{R(A^*)}$ , alors $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ (voir le TD.) D'où $R(A^*)$ est fermé.
On obtient l'implication réciproque par passage à l'adjoint. $\square$

**Remarque 2.1.2.** *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors on a :*
*$\mathcal{R}(A)$ fermé $\iff$ $\mathcal{R}(AA^*)$ fermé $\iff$ $\mathcal{R}(A^*A)$ fermé $\iff$ $\mathcal{R}(A^*)$ fermé.*
*Dans ce cas $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}((AA^*)^{\frac{1}{2}})$.*

**Proposition 2.1.3.** *Soit $A$ un opérateur positif de $\mathcal{B}(H)$. Alors on a :*

(i) *$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})$ et $\overline{R(A)} = \overline{\mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})}$,*

(ii) *$\mathcal{R}(A)$ est fermé si et seulement si $\mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})$ est fermé,*

(iii) *$A$ est inversible si et seulement si $\mathcal{R}(A) = H$.*

*Preuve.* 1. On a $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, Ceci implique $R(A) \subset R(A^{\frac{1}{2}})$.
Montrons que $N(A) = N(A^{\frac{1}{2}})$
Pour $x \in H$ :

$$||A^{\frac{1}{2}}x||^2 =< A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x >=< Ax, x > .$$

Pour $x \in N(A)$, On a $Ax = 0$ et donc $||A^{\frac{1}{2}}x||^2 = 0$. Alors $A^{\frac{1}{2}}x = 0$. par conséquent $x \in N(A^{\frac{1}{2}})$. D'où $N(A) \subset N(A^{\frac{1}{2}})$, et comme $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, on trouve $N(A^{\frac{1}{2}}) \subset N(A)$. Alors $N(A) = N(A^{\frac{1}{2}})$, donc on obtient

$$N(A)^{\perp} = N(A^{\frac{1}{2}})^{\perp} \Longrightarrow \overline{R(A^*)} = \overline{R((A^{\frac{1}{2}})^*)} \Longrightarrow \overline{R(A)} = \overline{R(A^{\frac{1}{2}})}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} R(A)\, est\, ferme' &\iff R(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme' \\ &\iff R((A^{\frac{1}{2}})^*A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme' \\ &\iff R(A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme'. \end{aligned}$$

3. ($\Longrightarrow$). évident.

($\Longleftarrow$) Supposons que $R(A) = H$. Alors $R(A)^{\perp} = \{0\}$ . Donc $N(A^*) = N(A) = \{0\}$. D'où A est invesible.

□

## 2.2 Caractérisation des opérateurs à images fermées par le spectre

**Théorème 2.2.1.** *Soit $A \in B(H)$. Alors on a*

$$R(A) \text{ fermé si et seulement si } 0 \notin acc(\sigma(A^*A)) \ .$$

*Preuve.* $\Rightarrow$ Supposons que $\mathcal{R}(A)$ est fermé, alors $R(A^*A)$ est fermé aussi. on a

$$\begin{aligned} H &= N(A^*A)^{\perp} \oplus N(A^*A) \\ H &= N(A)^{\perp} \oplus N(A) \\ &= \overline{R(A^*)} \oplus N(A) \\ &= R(A^*) \oplus N(A). \end{aligned}$$

Donc

$$A^*A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

il est facile de vérifier que $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ et $B_1 : \mathcal{R}(A^*) \longrightarrow \mathcal{R}(A^*)$ un opérateur inversible. Par conséquent

$$A^*A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui implique

$$\sigma(A^*A) = \sigma(B_1) \cup \{0\},$$

alors 0 est un point isolé du $\sigma(A^*A)$ et donc $0 \notin acc(\sigma(A^*A))$.
$\Leftarrow$ supposons Maintenant que $0 \notin acc(\sigma(A^*A))$. Alors

cas 1 : Si $0 \notin \sigma(A^*A)$, alors $A^*A$ est inversible. Donc d'après le Théorème 2.1.2,il résulte

$$R(A^*A) \text{ fermé} \Longrightarrow R(A^*) \text{ fermé} \Longrightarrow R(A) \text{ fermé}.$$

cas 2 : $0 \notin acc(\sigma(A^*A))$. Donc on obtient 0 est un point isolé de $\sigma(A^*A)$. Comme

$$H = N(A)^\perp \oplus N(A),$$

Suivant cette somme, on a

$$A^*A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : N(A)^\perp \oplus N(A) \longrightarrow NN(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A).$$

L'opérateur $B_1 = A^*A|_{N(A)^\perp} : N(A)^\perp \longrightarrow N(A)^\perp$ est injectif car

$$B_1(x) = 0 \Rightarrow A^*A(x) = 0 \Rightarrow x \in N(A^*A) = N(A),$$

donc

$$x \in N(A)^\perp \cap N(A) = \{0\} \Rightarrow x = 0.$$

Il est clair que $B_2 = B_4 = 0$.

$$B_3 = A^*A|_{N(A)^\perp} : N(A)^\perp \longrightarrow N(A).$$

$B_3 = 0$ car pour $x \in N(A)^\perp,\ B_3(x) = A^*A(x)$, on obtient

$$\begin{cases} A^*A(x) \in N(A) \\ et \\ A^*A(x) \in R(A^*) \subset \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp. \end{cases}$$

D'où

$$B_3(x) \in N(A) \cap N(A)^\perp = \{0\} \Rightarrow B_3(x) = 0.$$

Par conséquent

$$A^*A = \begin{bmatrix} A^*A|_{\mathcal{N}(A)^\perp} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{N}(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A) \longrightarrow \mathcal{N}(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A).$$

Alors

$$\sigma(A^*A) = \sigma(A^*A|_{\mathcal{N}(A)^\perp}) \cup \{0\}.$$

Montrons que $0 \notin \sigma(A^*A|_{\mathcal{N}(A)^\perp})$.
Supposons par l'absurde que $0 \in \sigma(A^*A|_{N(A)^\perp})$. comme 0 est un point isolé de $\sigma(A^*A)$,alors 0 est un point isolé de $\sigma(A^*A|_{N(A)^\perp})$ et puisque $A^*A|_{N(A)^\perp}$ est auto-adjoint alors 0 est un valeur propre de $A^*A|_{N(A)^\perp}$, ce qui contredit l'injectivité de $A^*A|_{N(A)^\perp}$ . On conclut que $0 \notin \sigma(A^*A|_{N(A)^\perp})$.
Donc $A^*A|_{N(A)^\perp}$ est inversible et par suite $R(A^*A)$ est fermé. D'où $R(A)$ est fermé aussi. □

**Corollaire 2.2.1.** *Soit $T$ un opérateur auto-adjoint,alors $\mathcal{R}(A)$ fermé si est seulement si $0 \notin acc(\sigma(A))$*

*Preuve.* Comme

$$\sigma(A^*A) = \sigma(A^2) = (\sigma(A))^2.$$

D'après le Théorème précédent, on déduit que $\mathcal{R}(A)$ fermé si est seulement si $0 \notin acc(\sigma(A))$. □

## 2.3 L'inverse de Moore-Penrose

**Définition 2.3.1.** L'inverse de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{B}(H)$ est l'opérateur $T^+ \in \mathcal{B}(H)$ vérifiant

$$\begin{cases} TT^+T = T. \\ T^+TT^+ = T^+. \\ (TT^+)^* = TT^+. \\ (T^+T)^* = T^+T. \end{cases}$$

Si $T^+$ existe, alors on dit que T est MP inversible.

**Remarque 2.3.1.**
- *$0^+ = 0$ et $(\lambda A)^+ = \frac{1}{\lambda}A^+$, pour $\lambda \neq 0$.*
- *Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, $(T^+)^+ = T$.*
- *Si $T$ est inversible alors $T^+ = T^{-1}$.*
- *Si $P$ est une projection alors $P^+ = P_{\mathcal{N}(P)^\perp}P_{\mathcal{R}(P)}$.*
- *Si $P$ est une projection orthogonale alors $P^+ = P$.*
- *$TT^+$ est une projection orthogonale sur $R(T)$, de noyau $N(T^+)$.*
- *$T^+T$ une projection orthogonale sur $R(T^+)$, de noyau $N(T)$.*

**Théorème 2.3.1.** *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$T$ posséde un inverse généralisé.*

(ii) *$R(T)$ est fermé.*

(iii) *$T^+$ existe et il est unique.*

*Preuve.* ⋆ (i) $\Longrightarrow$(ii).
Supposons que $S$ est un inverse généralisé de $T$. Alors $TS$ est un idempotent sur $R(T)$. Donc $R(T)$ est fermé.

⋆ (ii) $\Longrightarrow$(iii).
Si $R(T)$ est fermé, alors $R(T^*)$ est fermé aussi. Par conséquent $H = R(T^*) \oplus N(T) = R(T) \oplus N(T^*)$. Donc $T$ est sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(T^*) \oplus N(T) \to R(T) \oplus N(T^*).$$

où $T_1$ est un opérateur linéaire borné inversible de $R(T^*)$ dans $R(T)$.
Posons

$$S = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(T) \oplus N(T^*) \to R(T^*) \oplus N(T).$$

On a alors :

$$\begin{cases} TST = T. \\ STS = S. \\ TS = (TS)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{R}(T)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \\ ST = (ST)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{R}(T^*)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Donc $S$ est l'inverse de Moore-Penrose de $T$.
Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il existe $T_1^+$, $T_2^+$ deux inverses de Moore-Penrose de $T$. Donc $TT_1^+$, $TT_2^+$ sont deux projections orthogonales sur $R(T)$ ce qui implique $TT_1^+ = TT_2^+$. En multipliant cette Dernière équation à gauche par $T_1^+$, et en utilisant la définition de l'inverse Moore-Penrose, on obtient $T_1^+ = T_1^+TT_2^+$ . Comme $T_1^+T$ et $T_2^+T$ sont deux projections orthogonales de noyau $N(T)$, alors $T_1^+T = T_2^+T$. Donc $T_1^+ = T_2^+TT_2^+ = T_2^+$.

⋆ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) est vidente.

□

**Remarque 2.3.2.** *D'après la démonstration du théorème précédent, on conclut que si l'inverse de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{B}(H)$ existe alors :*

- $R(T^+) = R(T^+T) = R(T^*)$.
- $N(T^+) = N(TT^+) = N(T^*)$.
- $H = R(T) \oplus N(T^+)$ *et* $H = R(T^+) \oplus N(T)$.

### 2.3.1 Quelques relations entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose

le résultat suivant est une conséquence immédiate des deux théorèmes 2.3.1, 2.1.2

**Théorème 2.3.2.** *Soit $T \in B(E,F)$ alors les proprietés suivantes sont équvalentes :*
(1) $T^+$ *existe*
(2) $(T^*T)^+$ *existe*
(3) $(TT^*)^+$ *existe*
(4) $(T^*)^+$ *existe*

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'inverse de Moore-Penrose.

**Proposition 2.3.3.** *Soit $T \in \mathfrak{B}(H)$. Si $R(T)$ est fermé, alors on a :*

(i) $(T^*)^+ = (T^+)^*$.

(ii) $(T^*T)^+ = T^+(T^+)^*$.

(iii) $(TT^*)^+ = (T^+)^*T^+$.

(iv) $T^* = T^+TT^* = T^*TT^+$.

(v) $T^+ = (T^*T)^+T^* = T^*(TT^*)^+$.

(vi) $(T^*)^+ = T(T^*T)^+ = (TT^*)^+T$.

*Preuve.* (i) D'après la définition de $T^+$, on obtient :

1. $(T^+)^*T^*(T^+)^* = (T^+TT^+)^* = (T^+)^*$.
2. $T^*(T^+)^*T^* = (TT^+T)^* = T^*$.
3. $(T^*(T^+)^*)^* = T^+T = (T^+T)^* = T^*(T^+)^*$.
4. $((T^+)^*T^*)^* = TT^+ = (TT^+)^* = (T^+)^*T^*$.

Donc $(T^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de $T^*$.
(ii) Puisque on a :

1. $T^*TT^+(T^+)^*T^*T = T^*TT^+(TT^+)^*T = T^*TT^+TT^+T = T^*T$.
2. $T^+(T^+)^*T^*TT^+(T^+)^* = T^+(TT^+)^*TT^+(T^+)^* = T^+TT^+(T^+)^* = T^+(T^+)^*$.
3. $(T^*TT^+(T^+)^*)^* = T^+TT^+T = T^+T = (T^+T)^* = (TT^+T)^*(T^+)^* = T^*TT^+(T^+)^*$.
4. $(T^+(T^+)^*T^*T)^* = (T^+(T)T^+T)^* = T^+T = T^+(T^+)^*T^*T$.

Donc $T^+(T^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de $T^*T$.
(iii) Se déduit de $(ii)$, en remplaçant $T$ par $T^+$.
(iv) Comme $T^+T$ est une projection sur $R(T^*)$, alors on obtient

$$T^* = T^+TT^* = (T^+T)^*T^* = T^*(TT^+)^* = T^*TT^+.$$

(v) Il est bien clair que $T^+ = T^+(T^+)^*T^*$. Par l'utilisation de (ii), on obtient la première égalité de (v). De la même méthode, on trouve la deuxième égalité de (v).
(vi) Se déduit de (v). □

### 2.3.2 l'inverse de Moore-Penrose de Quelques matrices d'opérateurs $(2 \times 2)$.

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

**Théorème 2.3.4.** *Soit $A \in B(E)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors $T$ est MP inversible si et seulement si $A$ est MP inversible (i.e $R(A)$ fermé) et dans ce cas $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

*Preuve.* Comme $R(T) = R(A)$, alors
$T^+$ existe $\iff$ R(T) fermé $\iff$ $R(A)$ fermé $\iff$ $A^+$ existe.
Il est facile de vérifier que $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

**Théorème 2.3.5.** *Soient* $A \in B(E), B \in B(F)$, *posons* $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. *Alors* $T$ *est MP inversible si et seulement si* $R(A)$ *et* $R(B)$ *sont fermés et dans ce cas* $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$.

*Preuve.* On a $R(A) \oplus R(B) \subset E + F$ . Donc

$$\begin{aligned} T\,est\,MP\,inversible &\iff R(T) ferme' \\ &\iff R(A)\ ferme'\ et\ R(B)\ ferme'. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix}$. □

**Théorème 2.3.6.** *Soient* $A \in B(E)$ *et* $B \in B(F, E)$, *posons* $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. *Alors* $T$ *est MP inversible si et seulement si* $R(A) + R(B)$ *est fermé dans* $E$ *et dans ce cas*

$$T^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

*Preuve.* On a

$$TT^* = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R(T) ferme' &\iff R(TT^*) ferme' \\ &\iff R(AA^* + BB^*) ferme' \\ &\iff (AA^* + BB^*)^+ existe. \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$R(AA^* + BB^*) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A) + R(B).$$

D'après la proposition 2.3.3, on a

$$T^+ = T^*(TT^*)^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

□

**Théorème 2.3.7.** *Soient* $A \in B(E, F)$ *et* $B \in B(F, E)$, *posons* $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. *Alors* $T$ *est MP inversible si et seulement si* $R(A) + R(B)$ *est fermé dans* $E$ *et dans ce cas*

$$T^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^*(AA^* + BB^*)^+ \\ 0 & B^*(AA^* + BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$

*Preuve.* On a

$$TT^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AA^* + BB^* \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R(T)ferme' &\iff R(TT^*)ferme' \\ &\iff R(AA^*+BB^*)ferme' \\ &\iff R((AA^*+BB^*)^{\frac{1}{2}})ferme' \\ &\iff R(A)+R(B)ferme'. \end{aligned}$$

Dans ce cas $(AA^*+BB^*)^+$ existe, alors

$$T^+ = T^*(TT^*)^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^*(AA^*+BB^*)^+ \\ 0 & B^*(AA^*+BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$

□

### 2.3.3 EP opérateurs

**Définition 2.3.2.** Soit $A \in B(H)$ à image fermée. On dit que A est un EP opérateur si $AA^+ = A^+A$.

**Exemple 2.3.1.** Si A est inversible, alors A est un EP opérateur ( $AA^{-1} = A^{-1}A$ )

**Théorème 2.3.8.** *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A EP opérateur*
2. *$R(A) = R(A^*)$.*
3. *$N(A) = N(A^*)$.*
4. *$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*)$, où $A_1 \in B(H)$ inversible.*

*Preuve.* ($1 \Rightarrow 2$). Supposons que A est EP alors $AA^+ = A^+A$. ce qui donne $R(AA^+) = R(A^+A)$. Donc $R(A) = R(A^*)$.
($2 \Rightarrow 3$). Supposons que $R(A) = R(A^*)$. Alors $R(A)^\perp = R(A^*)^\perp$. Donc $N(A^*) = N(A)$.
($3 \Rightarrow 4$). Supposons $N(A) = N(A^*)$. On a

$$H = N(A^*)^\perp \oplus N(A^*) = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = R(A) \oplus N(A).$$

Donc

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A).$$

Il est clair que $A_2 = A_3 = A_4 = 0$.
Montrons que$A_1$ est injectif.

$$\begin{aligned} A_1 : R(A) &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto A_1(x) = A(x). \end{aligned}$$

Soit $x \in R(A)$ tel que $A_1x = 0 = Ax$. Donc $x \in R(A) \cap N(A) = \{0\}$.
Montrons que $A_1$ est surjectif
Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ tel que $Ax = y$. On a $x = x_1 \oplus x_2 \in R(A) \oplus N(A)$. Alors $y = Ax = Ax_1 = A_1x_1$ et donc $A_1$ surjectif.

Comme $R(A)$ est fermé, alors il est complet et puisque $A_1$ bijectif, alors il est inversible. $(4 \Rightarrow 1)$. Supposons

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A),$$

où $A_1 \in B(R(A))$ inversible. puisque $R(A)$ fermé, alors $A^+$ existe et

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que $AA^+ = A^+A$. □

**Remarque 2.3.3.** *On a*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*)$$

*$A$ est EP oprateur* $\iff$ *$A_1$ inversible et $A_2 = 0$.*

### 2.3.4 Opérateur normal à image fermée

**Définition 2.3.3.** On dit que $T \in B(H)$ est normal si $TT^* = T^*T$.

**Proposition 2.3.9.** *Soit $A \in B(H)$ un opérateur normal à image fermée. Alors A est un EP opérateur.*

*Preuve.* Puisque A normal, alors $N(A^*) = N(A)$. Comme $R(A)$ fermé alors d'après le théorème précédent, on trouve que A est EP opérateur. □

**Remarque 2.3.4.** *L'implication réciproque n'est pas vraie. Il suffit de voir l'exemple suivant :*

**Exemple 2.3.2.** Soit $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \longrightarrow H$ où $A$ inversible mais n'est pas normal. Alors $T$ n'est pas normal, car

$$TT^* = \begin{bmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^*T$$

Mais

$$TT^+ = \begin{bmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^+T.$$

Alors $T$ est un EP opérateur.

**Exemple 2.3.3.** Soit $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Donc $T$ n'est pas normal. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $T^+ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il est facile de voir que $TT^+ = T^+T$.

### 2.3.5 Isométrie partielle

**Définition 2.3.4.** On dit que $T \in B(H)$ est une isométrie partielle si $||Tx|| = ||x||, \ \forall x \in N(T)^{\perp}$.

**Proposition 2.3.10.** *Soit $T \in \mathrm{B}(H)$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$T$ est une isométrie partielle,*

(2) *$T^*$ est une isométrie partielle,*

(3) *$TT^*$ est une projection orthogonale sur $R(T)$,*

(4) *$T^*T$ est une projection orthogonale sur $Ker(T)^{\perp}$,*

(5) *$TT^*T = T$,*

(6) *$T^*TT^* = T^*$.*

*Preuve.* Voir le cours du professeur Ameur Seddik . □

**Théorème 2.3.11.** *Soit $T \in B(H)$ image fermée. Alors*

$$T \text{ une isomtrie partielle} \iff T^+ = T^*.$$

*Preuve.* ($\Rightarrow$) Supposons que $T$ est une isométrie partielle. D'après la proposition précédente, on trouve

$$\begin{cases} T & = TT^*T, \\ T^* & = T^*TT^*, \\ TT^* & = P_{R(T)}, \\ T^*T & = P_{N(T)^{\perp}}. \end{cases}$$

On conclut que $T^+ = T^*$.
($\Leftarrow$). Supposons que $T^+ = T^*$. Ce qui implique que $T = TT^*T$, D'après la proposition précédente $T$ est une isométrie partielle. □

**Corollaire 2.3.1.** *Soit $T \in B(H)$ à image fermée. Alors $T$ est une isométrie partielle si et seulement si $T^+ = T^*$.*

### 2.3.6 Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles

**Remarque 2.3.5.** *Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles n'est pas toujours Moore-Penrose inversible. Il suffit de voir l'exemple suivant*

**Exemple 2.3.4.** Soit $A \in B(H)$ tel que $R(A)$ n'est pas fermé. Posons

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ et \ S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & I \end{bmatrix}.$$

$T$ est MP inversible. De plus $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & I \end{bmatrix} = S.S$ Alors S est une projection donc elle est MP inversible. Mais $ST = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas MP inversible car R(A) n'est pas fermé.(R(ST) = R(A))

**Théorème 2.3.12.** *Soient $A \in B(G,F), B \in B(F,G)$ deux opérateurs à images fermées et soient $Q \in B(G)$ une projection de noyau $N(A)$ et $P \in B(G)$ une projection sur $R(B)$. Alors*

$$AB \ est \ MP \, inversible \iff QP \ est \ MP \, inversible.$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} AB \ est \ MP \, inversible &\iff R(AB) ferme' \\ &\iff AR(B) ferme' \\ &\iff AR(P) ferme' \\ &\iff R(AP) ferme' \\ &\iff R((AP)^*) ferme' \\ &\iff R(P^*A^*) ferme' \\ &\iff P^*R(A^*) ferme' \end{aligned}$$

Comme $R(A^*) = N(A)^\perp = N(Q)^\perp = \overline{R(Q^*)} = R(Q^*)$ car $Q$ une projection. Donc

$$\begin{aligned} AB \ est \ MP \, inversible &\iff P^*R(Q^*) ferme' \\ &\iff R((P^*Q^*)^*) ferme' \\ &\iff R(QP) ferme' \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.3.2.** *Soient $A \in B(F,G), B \in B(G,F)$ à images fermées. Alors*

$$AB \ est \ MP \, inversible \iff R(A^+ABB^+) \ ferme'.$$

*Preuve.* Puisque $A^+A \in B(F)$ est une projection de noyau $N(A)$ et $BB^+$ est une projection sur $R(B)$. Alors par l'application du théorème précédent, on trouve

$$AB \ est \ MP \, inversible \iff R(A^+ABB^+) \ ferme'.$$

□

**Théorème 2.3.13.** *Soient $E, F, G$ des espaces de Hilbert,et $A \in B(G,F), B \in B(E,G)$ à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $(AB)^+AB = B^+A^+AB$

2. $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$

*Preuve.* (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. Comme

$$R(A^+A) = R(A^+) = R(A^*),$$

alors on trouve $A^+ABB^*A^* = BB^*A^*$. Par passage à l'adjoint, on obtient

$$ABB^*(A^+A)^* = ABB^*,$$

$$ABB^*A^*(A^+)^* = ABB^*$$

En multipliant cette dernière égalité à gauche par $(AB)^+$, on trouve

$$(AB)^+ABB^*A^*(A^+)^* = (AB)^+ABB^*. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a

$$R((AB)^+AB) = R((AB)^+) = R((AB)^*) = R(B^*A^*),$$

donc

$$(AB)^+ABB^*A^* = B^*A^*.$$

De 2.1, on obtient

$$B^*A^*(A^+)^* = (AB)^+ABB^*,$$

on en déduit que

$$B^*A^*(A^+)^*(B^+)^* = (AB)^+ABB^*(B^+)^*.$$

$$\begin{aligned}(B^+A^+AB)^* &= (AB)^+AB(B^+B)^* \\ &= (AB)^+ABB^+B \\ &= (AB)^+AB\end{aligned}$$

Donc

$$(B^+A^+AB)^* = (B^+A^+AB) = ((AB)^+AB)^* = (AB)^+AB.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons maintenant que $(AB)^+AB = B^+A^+AB$.
Comme $(AB)^+AB$ est une projections orthogonale sur $B^*A^*$, alors $(AB)^+ABB^*A^* = B^*A^*$ et donc

$$B^+A^+ABB^*A^* = B^*A^*.$$

En multipliant cette égalité à gauche par l'opérateur $ABB^*B$, on obtient

$$ABB^*BB^*A^* = AB(B^*BB^+)A^+ABB^*A^* = ABB^*A^+ABB^*A^*.$$

Par conséquent

$$ABB^*(I - A^+A)BB^*A^* = 0$$

Alors pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}0 &=< (ABB^*(I - A^+A)BB^*A^*)(x), x > \\ &=< (I - A^+A)BB^*A^*)(x), BB^*A^*(x) > \\ &=< (I - A^+A)BB^*A^*)(x), (I - A^+A)BB^*A^*(x) >\end{aligned}$$

car $I - A^+A$ est un projection orthogonale. Alors

$$(I - A^+A)BB^*A^* = 0.$$

Il s'ensuit que

$$R(BB^*A^*) \subset N(I - A^+A) = R(A^+A) = R(A^*).$$

On conclut que $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. □

**Théorème 2.3.14.** *Soient $A \in B(G,F)$ et $B \in B(E,G)$ deux opérateurs à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $AB(AB)^+ = ABB^+A^+$

2. $R(A^*AB) \subset R(B)$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} AB(AB)^+ = ABB^+A^+ &\iff (AB(AB)^+)^* = (ABB^+A^+)^* \\ &\iff ((AB)^+)^*B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \\ &\iff ((AB)^*)^+B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \\ &\iff (B^*A^*)^+B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \end{aligned}$$

Puisque$R(AB)$ fermé, alors $R(B^*A^*)$ est aussi fermé. D'après le théorème précédent, on déduit que

$$AB(AB)^+ = ABB^+A^+ \iff R(A^*AB) \subset R(B).$$

□

**Théorème 2.3.15.** *Soient $A \in B(G,F), B \in B(E,G)$ deux opérateurs à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $(AB)^+ = B^+A^+$ ;

(2) $R(A^*AB) \subset R(B)$ *et* $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$.

*Preuve.*

1 $\Longrightarrow$ 2. Cette implication est dérivée à partir des deux Théorèmes 3.2.13 et 3.2.14.

2 $\Longrightarrow$ 1. Supposons que $R(A^*AB) \subset R(B)$ et $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. Par l'application des deux théorèmes précédents on trouve :

- $ABB^+A^+AB = AB(AB)^+AB = AB$.
- $(ABB^+A^+)^* = (AB(AB)^+)^* = AB(AB)^+$.
- $(B^+A^+AB)^* = ((AB)^+AB)^* = (AB)^+AB$.

Donc pour obtenir (1), il suffit de montrer que $B^+A^+ABB^+A^+ = B^+A^+$.
On a

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E = R(B^*) \oplus N(B) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*),$$

où $B_1 \in B(R(B^*), R(B))$ est inversible
Dans ce cas on obtient

$$B^+ = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : G = R(B) \oplus N(B^*) \Longrightarrow E = R(B^*) \oplus N(B).$$

D'autre part on a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : G = R(B) \oplus N(B^*) \Longrightarrow F = R(A) \oplus N(A^*).$$

Cela implique que

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^* D^+ & 0 \\ A_2^* D^+ & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(A^*) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*),$$

où $D = A_1 A_1^* + A_2 A_2^*$ est positif dans $R(A)$. .
Comme

$$AA^* = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors $R(D) = R(AA^*) = R(A)$ car $R(A)$ est fermé. Donc : $D : R(A) \longrightarrow R(A)$ est opérateur positif surjectif. D'où il est inversible. Par conséquent

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^*(D)^{-1} & 0 \\ A_2^*(D)^{-1} & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(A^*) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*).$$

Donc

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E = R(B^*) \oplus N(B) \Longrightarrow F = R(A) \oplus N(A^*) \text{ .......(1)}$$

$$(AB)^+ = \begin{bmatrix} (A_1 B_1)^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(^{A}*) \Longrightarrow E = R(B^*) \oplus N(B)\text{........(2)}$$

Comme $R(A^*AB) \subset R(B)$, alors par l'application du théorème précédent on a :
$AB(AB)^+ = ABB^+A^+$ alors de (1)et (2) on obtient :

$$A_1 B_1 (A_1 B_1)^+ = A_1 B_1 B_1^{-1} A_1^* D^{-1} = A_1 B_1 A_1^* D^{-1}$$

Alors

$$A_1 B_1 (A_1 B_1)^+ A_1 B_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1.$$

Il s'ensuit

$$A_1 B_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1,$$

$$A_1 B_1 B_1^{-1} = A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1 B_1^{-1},$$

$$A_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
B^+A^+ABB^+A^+ &= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}(A_1A_1^*D^{-1}A_1)^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= B^+A^+
\end{aligned}$$

Donc $(AB)^+ = B^+A^+$ $\square$