Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2 AFTOL, 2019-2020

Examen de rattrapage
Inverses Généralisés

Dans ce qui suit H désigne un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée.*

(I) *Montrer que si $P \in B(H)$ un idempotent tel que $\|P\| \leq 1$, alors P est une projection orthogonale.*

(II) *Supposons que $(A^+)^2$ est un inverse intérieur de A^2.*

- (a) *Montrer que $A^+A^2A^+$ est une projection orthogonale.*
- (b) *Montrer que $A^+A^2A^+ = A(A^+)^2A$.*

Exercice 2. *Soit $T \in B(H)$ à image fermée.*

(1) *Montrer que : T une isométrie partielle si et seulement si $TT^* = TT^+$.*

(2) *Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *T EP- opérateur ;*
- (b) *$d(T) < \infty$ et $(T^+)^2T = T^+$.*

(3) *On suppose que T est groupe-inversible tel que $TT^+T^\# = T^+T^\#T$.*
Montrer que T est EP.

Exercice 3. (I) *Soit $C \in B(H)$ Drazin-inversible. Montrer que $((C^D)^D)^D = C^D$.*

(II) *Soient $A, B \in B(H)$ tel que AB est Drazin-inversible d'indice $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = B((AB)^D)^2A$.*

- (a) *Montrer que $BAE = EBA$, $BAE^2 = E$.*
- (d) *Est ce que BA est Drazin-inversible ?.*

Exercice 4. *Soit la classe d'opérateurs suivante :*

$$\mathscr{P}_+ = \{A \in B(H) \setminus R(A) \ fermé \ et \ A^4 = A^+\}$$

(d) *Montrer que : $A \in \mathscr{P}_+ \Leftrightarrow A$ EP et $A^6 = A$.*

(e) *Supposons que $A \in \mathscr{P}_+$. En déduire que A^5 est une projection orthogonale.*

Envoyez vos réponses par email à :
s.menkad@univ-batna2.dz
Chaque étudiant doit mentionner clairement son nom et prénom.