République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de Batna 2
Mustafa Ben Boulaid

Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs linéaires
Semestre 3

Théorie des Inverses Généralisés cours et exercices

Dr Menkad Safa

Année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

On constate que beaucoup de problèmes dans la théorie des opérateurs ou dans d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre, l'analyse numérique, la théorie spectrale…, sont fortement liés à la notion d'inversibilité usuelle des matrices ou des opérateurs, raison pour laquelle, certains mathématiciens ont introduit de nouvelles notions d'inversibilité qui sont utiles à la résolution des problèmes dont la notion d'inversibilité usuelle n'y est pas vérifiée. Parmi eux, nous citons J. Von Neumann, I. Kaplansky, M. Z Nashed, C. R. Cardus, J. J. koliha …et bien d'autres.
En 1936, J. Von Neumann [38] a introduit la notion d'inverse généralisé pour les éléments d'un anneau, plus tard et plus précisément en 1948, I. Kaplansky [24] a donné une extention de cette notion pour les algébres. Enfin la notion d'inverse de Moore-Penrose ou Pseudo-inverse a été établie indépendament par E. H. Moore [32], en 1922 et R. [34] Penrose en 1955.
Ce cours s'adresse aux étudiants de Master 2, spécialité analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs linéaires. Il leurs propose une formation avancée dans la théorie des inverses généralisés. Son objectif principal est d'initier les étudiants à la recherche dans la théorie des opérateurs et plus particulièrement, dans la théorie des inverses généralisés. C'est la raison pour laquelle à la plupart des énoncés du cours, on propose une preuve complète, dont on peut s'inspirer pour résoudre la collection d'exercices donnée dans Le dernier chapitre. J'ai indiqué à la fin de ce cours une liste bibliographique. Plusieurs titres de cette liste sont la base de cette rédaction.

Chapitre 1

Inverse généralisé

Dans ce chapitre E et F sont deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$ Un cas particulier important de distance est celui des distances qui dérivent d'une norme, c'est une notion qui s'inspire de la structure d'espace vectoriel, en particulier la norme des vecteurs de l'espace.

Définition 1.0.1. Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une norme sur X est une application $N : X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les trois axiomes suivants :

(i) $\forall x \in X, \qquad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(ii) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$

(iii) $\forall x, y \in X, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y).$

Une telle application N s'appelle une norme sur X, et on dira que le couple (X, N) un espace normé.
La plupart du temps, une norme est notée $\|x\|$ plutôt que $N(x)$.

Exemple 1.0.1. La valeur absolue définit une norme sur $\mathbb{R}$. Le module définit une norme sur $\mathbb{C}$.

Exemple 1.0.2. Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, posons

$$\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Il est facile de voir que $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ vérifient les axiomes (i) et (ii) de la définition 4.1.1. Elles vérifient aussi l'axiome (iii). En effet, pour $i \in \{1, ..., n\}$ on a

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \tag{1.1}$$

En prenant le maximum sur $i \in \{1, ..., n\}$, on déduit

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

De même en sommant l'inégalité (4.1.1) sur $i \in \{1, ..., n\}$, on a bien

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

D'autre part de l'inégalité (4.1.1), on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=0}^{n} |y_i|^2 + 2\sum_{i=0}^{n} |x_i y_i|$$

Par l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=0}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient donc l'inégalité

$$\|x+y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2.$$

Finalement, $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.
Ainsi $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.0.3. Soit $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a,b]$. Pour $f, \in C([a,b],\mathbb{R})$, posons

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$
$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Alors $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

Proposition 1.0.1. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé. Alors pour tous $x, y \in X$, on a*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

Preuve. Pour $x, y \in X$, on a
$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.
$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|x-y\| + \|x\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \geq -\|x-y\|$.
Par conséquent $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$. □

Définition 1.0.2 (Norme induite). Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et F un sous espace vectoriel de X. La restriction de la norme $\|.\|$ est évidemment une norme sur F, appelée norme induite.

Proposition 1.0.2 (Distance associée à une norme). *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé. Pour $x, y \in X$, on pose $d(x,y) = \|x-y\|$. Alors d est une distance sur X. On dira que d est la distance associée à la norme $\|.\|$.*
Ainsi tout espace normé est un espace métrique et la norme $\|.\|$ engendre une topologie sur X.

Preuve. L'application d ainsi définie vérifie alors les trois propriétés :
- Pour $x, y \in X$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- Pour $x, y \in X$, $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$.
- Pour $x, y, z \in X$,
$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.

□

Remarque 1.0.1. *Les distances d_i $(i = 1, 2, \infty)$ sur $\mathbb{K}^n$, données dans 1.1.4, dérivent des normes $\|.\|_i$ $(i = 1, 2, \infty)$, données dans 4.1.3.*

Remarque 1.0.2. *Attention, toute distance ne dérive pas d'une norme, comme par exemple la distance discrète :*

$$\begin{cases} d(x, y) = 1, \; si x \neq y \\ d(x, y) = 0, \; si x = y \end{cases}$$

En effet, l'application N obtenue, on posons $N(x) = d(x, 0)$ ne vérifie pas l'axiome (ii) de la norme.

1.1 normes équivalentes

Définition 1.1.1. Soient $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux normes sur le même espace vectoriel X. On dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que pour tous $x, \in X$.

$$\|x\|_1 \leq k_1\|x\|_2 \quad et \quad \|x\|_2 \leq k_2\|x\|_1.$$

Remarque 1.1.1. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur X ne sont pas équivalentes si et seulement si il existe une suite $(x_{n)_n}$ d'éléments de X telle que la suite $(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2})_n$ ne soit pas bornée.*

Exemple 1.1.1. Sur $\mathbb{K}^n$ les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. En effet, pour $x \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Exemple 1.1.2. Considérons l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$. les deux normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

ne sont pas équivalentes. En effet, considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $C([0, 1], \mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

On a $\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{2}$.
D'où $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \to +\infty$.
Donc il n'existe pas de réels M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1$.

1.2 espace de Banach

Définition 1.2.1. Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

Remarque 1.2.1. *Les propriétés établies pour les espaces métriques complets sont bien sûr valables pour les espaces de Banach.*

Exemple 1.2.1. $(\mathbb{K}^n, \|.\|_i)$ est espace de Banach, pour $i = 1, 2, \infty$.

Exemple 1.2.2. L'espace $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$ n'est pas de Banach. Il suffit de prendre la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions continues

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n t^n, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ 1, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, car pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_0^1 |f_p(x) - f_q|dx = \frac{1}{2}|\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}| \overset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si on suppose par l'absurde que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Donc f n'est pas continue en 0.

Proposition 1.2.1. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Preuve. Sa preuve est laissée en exercice. □

Chapitre 2

L'inverse de Moore-Penrose

Dans ce chapitre H un espace de Hilbert.

2.1 Sur l'image d'un opérateur linéaire borné

Théorème 2.1.1. (*Douglas 1966*) *Soit $A, B \in B(H)$, alors les propriétés suivantes sont équivalantes :*

(a) $R(A) \subseteq R(B)$.

(b) $\exists\, \lambda > 0,\ AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.

(c) $\exists\, C \in B(H)$ *tq :* $A = BC$.

Preuve. • $a \Longrightarrow c$.

Supposons $R(A) \subseteq R(B)$.
Soit B_0 la restriction de B sur $N(B)^\perp$.

$$\begin{aligned} B_0 : N(B)^\perp &\longrightarrow R(B) \\ x \quad &\longmapsto B_0(x) = B(x) \end{aligned}$$

B_0 est un opérateur linéaire borné.
– B_0 est injectif car $\forall\, x \in N(B)^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} B_0(x) = 0 &\Longrightarrow B(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in N(B) \\ &\Longrightarrow x \in N(B) \cap N(B)^\perp \\ &\Longrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Comme B_0 est injectif et fermé.
Alors $B_0^{-1} : R(B) \longrightarrow N(B)^\perp$ est un opérateur fermé. Posons $C = B_0^{-1}A$, puisque $R(A) \subseteq R(B)$. Alors

$$C : H \longrightarrow N(B)^\perp.$$

Comme C fermé, H et $N(B)^\perp$ sont deux espaces de Banach alors C est borné (d'après le théorème du graphe fermé).
Donc $C = B_0^{-1}A \Longrightarrow A = B_0C = BC$ car $R(C) \subset N(B)^\perp$.

- $c \Longrightarrow b$.
  Supposons $\exists\, C \in B(H)$ tq $A = BC$ donc $A^* = C^*B^*$.
  Pour $x \in H$:

$$\begin{aligned}\langle AA^*x, x\rangle &= \|A^*x\|^2\\ &= \|C^*B^*x\|^2\\ &\leq \|C^*\|^2\|B^*x\|^2\\ &\leq \|C^*\|^2\langle BB^*x, x\rangle.\end{aligned}$$

  Posons $\lambda = \|C^*\| > 0$ donc $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$.
- $b \Longrightarrow a$.
  Supposons $\exists\, \lambda > 0$ tq $AA^* \leq BB^*$.
  Soit l'opérateur $D : R(B^*) \longrightarrow R(A^*)$ défini par $\forall\, x \in H, D(B^*(x)) = A^*(x)$.
  En effet $\forall\, y \in R(B^*), \exists\, x \in H$ tq $y = B^*(x) \Longrightarrow D(y) = D(B^*(x)) = A^*(x)$. Donc $DB^* = A^*$.
  D est linéaire.
  Montrons que D est borné.
  Soit $y \in R(B^*), \exists\, x \in H$, tq $y = B^*(x)$

$$\begin{aligned}\|Dy\|^2 &= \|DB^*(x)\|^2\\ &= \|A^*x\|^2\\ &= \langle AA^*x, x\rangle\\ &\leq \lambda^2\langle BB^*x, x\rangle\\ &\leq \lambda^2\|B^*x\|^2.\end{aligned}$$

  $\|Dy\|^2 \leq \lambda^2\|y\|^2 \Longrightarrow \|D(y)\| \leq \lambda\|y\|$ et $y > 0$. Donc D est borné sur $R(B^*)$.
  Donc par l'application du théorème de prolongement par continuté, il existe $\tilde{D}$ un opérateur unique linéaire borné tq :

$$\tilde{D} : \overline{R(B^*)} \longrightarrow R(A^*) \text{ et } \tilde{D}(x) = D(x) \ \text{ pour } x \in \overline{R(B^*)} \text{ et } \|\tilde{D}\| = \|D\|.$$

  Donc $DB = A^*$.
  Comme $H = \overline{R(B^*)} \oplus R(B^*)^{\perp}$.
  Posons : $S : H \longrightarrow H$

$$S(x) = \begin{cases} \tilde{D}(x) & \text{si } x \in \overline{R(B^*)}.\\ 0 & \text{si } x \in R(B^*)^{\perp}.\end{cases}$$

  S est un opérateur linéaire borné et $SB^* = DB^* = A^*$, alors $BS^* = A$. Donc $R(A) = R(BS^*) \subset R(B)$.

□

Remarque 2.1.1. *Soit $T \in B(H)$, alors $\mathcal{R}(T)$ n'est pas toujours fermé. Il suffit de voir l'exemple suivant :*

Exemple 2.1.1.

$$\begin{array}{llll} T : & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N})\\ & x = (x_1, x_2, \cdots) & \longmapsto & T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)\end{array}$$

Soit $x_n(j) \in l^2(\mathbb{N})$ une suite telle que :

$$x_n(j) = \begin{cases} 1 & si j \leqslant n \\ 0 & si j > n \end{cases}$$

Alors $T(x_n) \in R(T)$ et

$$Tx_n(j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & si j \leqslant n \\ 0 & si j > n \end{cases}$$

Il est clair que (Tx_n) converge vers $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, mais $y \notin R(T)$. Donc $R(T)$ n'est pas fermé.

Théorème 2.1.2. *Soient $A, B \in B(H)$. Alors on a :*

(i) $R(A) = R((AA^*)^{\frac{1}{2}})$.

(ii) $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$.

(iii) *$R(A)$ fermé si et seulement si $R(AA^*)$ fermé. Dans ce cas $R(A) = R(AA^*)$,*

(iv) *$R(A)$ fermé si et seulement si $R(A^*)$ fermé.*

Preuve. (i) On a $AA^* = (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}}$. Alors

$$\begin{cases} AA^* \leq (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ et \\ (AA^*)^{\frac{1}{2}}(AA^*)^{\frac{1}{2}} \leq AA^*. \end{cases}$$

En vertu du théorème précédent, on obtient

$$\begin{cases} R(A) \subset R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) \\ et \\ R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) \subset R(A). \end{cases}$$

Donc $R((AA^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A)$.

(ii) Soit $T \in B(H)$ défini par :

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H.$$

$R(T) = R(A) + R(B)$. On a

$$T^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \ TT^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ et \ (TT^*)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors $R(TT^*)^{\frac{1}{2}} = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$. D'après (i), $R(T) = (R(TT^*)^{\frac{1}{2}})$. Donc

$$R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}).$$

(iii) Supposons que $R(A)$ est fermé, alors

$H = R(A) \oplus R(A)^\perp = R(A) \oplus N(A^*)$. D'autre part, on a

$H = \overline{R(A^*)} \oplus \overline{R(A^*)}^\perp = \overline{R(A^*)} \oplus R(A^*)^\perp = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$.

Donc on peut écrire A sous la forme matricielle suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \overline{R(A^*)} \oplus N(A) \to R(A) \oplus N(A^*),$$

$$\begin{aligned} A_1 : A \setminus \overline{R(A^*)} &\longrightarrow R(A) \\ x \quad &\longmapsto A_1(x) = A(x). \end{aligned}$$

Montrons que A_1 bijectif.
A_1 injectif
On a $A_1 \underline{: A \setminus} R(A) \longrightarrow R(A)$
Soit $x \in \overline{R(A^*)}$ tel que $A_1 x = 0$, alors $Ax = 0$. Cela nous donne $x \in N(A) \cap \overline{R(A^*)} = \{0\}$.
A_1 surjectif.
Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ $y = Ax$. Comme $x \in H$, donc $\exists x_1 \in \overline{R(A^*)}$ et $x_2 \in N(A)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Donc $Ax = Ax_1 = A_1 x_1$.
Par conséquent A_1 est un opérateur linéaire borné bijectif sur $\overline{R(A^*)}$. Comme $\overline{R(A^*)}$ et $R(A)$ sont fermés alors A_1 est inversible.
On a $A_2 : A \setminus N(A) \longrightarrow R(A)$.
Soit $x \in N(A)$. On a $A_2 x = Ax = 0$. Donc $A_2 = 0$.
On a $A_3 \underline{: A \setminus} \overline{R(A^*)} \longrightarrow N(A^*)$.
Soit $x \in \overline{R(A^*)}$. On a $A_3 x = Ax \in R(A) \cap N(A^*) = \{0\}$. D'où $A_3 = 0$.
$A_4 : A \setminus N(A) \longrightarrow N(A^*)$. Soit $x \in N(A)$. On a $A_4 x = Ax = 0$. Donc $A_4 = 0$.

$$AA^* = \begin{bmatrix} A_1 A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \to R(A) \oplus N(A^*)$$

Comme A_1 est inversible, alors $A_1 A_1^*$ est un opérateur inversible dans $\mathrm{B}(R(A))$, et Puisque $R(AA^*) = R(A_1 A_1^*)$, on obtient $R(AA^*) = R(A)$, d'où $R(AA^*)$ est fermé.
Inversement, Supposons que $R(AA^*)$ est fermé, alors $H = R(AA^*) \oplus N(AA^*)$.
Comme $N(AA^*) = N(A^*)$, on obtient :

$$H = R(AA^*) \oplus N(AA^*) \subset R(A) \oplus N(A^*) \subset H.$$

D'où $R(A) = N(A^*)^\perp$. Donc $R(A)$ est fermé et $R(A) = R(AA^*)$.
(iv) Supposons que $R(A)$ est fermé, alors on a $R(A) = R(AA^*)$, ceci implique que pour tout $x \in H$, il existe $y \in H$ tel que $Ax = AA^*y$, alors $A(x - A^*y) = 0$. Par conséquent $x - A^*y \in N(A)$.

$$x = (x - A^*y) + A^*y \in N(A) + R(A^*)$$

Donc $R(A^*) = N(A)^\perp$; alors $\forall x \in \mathcal{H}, x \in \underline{N(A) +} R(A^*)$. Donc $H = N(A) + R(A^*)$ et comme $N(A) \cap R(A^*) = \{0\}$(car $R(A^*)^\perp = \overline{R(A^*)^\perp} = N(A)$). Par conséquent

$$\begin{aligned} H &= N(A) + R(A^*) \\ &= N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \ \ (\textit{somme direct topologique}) \end{aligned}$$

Comme $R(A^*) \subset \overline{R(A^*)}$, alors $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$ (voir le TD.) D'où $R(A^*)$ est fermé.
On obtient l'implication réciproque par passage à l'adjoint. $\square$

Remarque 2.1.2. *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors on a :*
$\mathcal{R}(A)$ *fermé* $\iff$ $\mathcal{R}(AA^*)$ *fermé* $\iff$ $\mathcal{R}(A^*A)$ *fermé* $\iff$ $\mathcal{R}(A^*)$ *fermé.*
Dans ce cas $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}((AA^*)^{\frac{1}{2}})$.

Proposition 2.1.3. *Soit A un opérateur positif de $\mathcal{B}(H)$. Alors on a :*

(i) $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})$ *et* $\overline{R(A)} = \overline{\mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})}$,

(ii) $\mathcal{R}(A)$ *est fermé si et seulement si* $\mathcal{R}(A^{\frac{1}{2}})$ *est fermé,*

(iii) A *est inversible si et seulement si* $\mathcal{R}(A) = H$.

Preuve. 1. On a $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, Ceci implique $R(A) \subset R(A^{\frac{1}{2}})$.
Montrons que $N(A) = N(A^{\frac{1}{2}})$
Pour $x \in H$:

$$||A^{\frac{1}{2}}x||^2 =< A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x >=< Ax, x > .$$

Pour $x \in N(A)$, On a $Ax = 0$ et donc $||A^{\frac{1}{2}}x||^2 = 0$. Alors $A^{\frac{1}{2}}x = 0$. par conséquent $x \in N(A^{\frac{1}{2}})$. D'où $N(A) \subset N(A^{\frac{1}{2}})$, et comme $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, on trouve $N(A^{\frac{1}{2}}) \subset N(A)$. Alors $N(A) = N(A^{\frac{1}{2}})$, donc on obtient

$$N(A)^{\perp} = N(A^{\frac{1}{2}})^{\perp} \Longrightarrow \overline{R(A^*)} = \overline{R((A^{\frac{1}{2}})^*)} \Longrightarrow \overline{R(A)} = \overline{R(A^{\frac{1}{2}})}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} R(A)\, est\, ferme' &\iff R(A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme' \\ &\iff R((A^{\frac{1}{2}})^*A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme' \\ &\iff R(A^{\frac{1}{2}})\, est\, ferme'. \end{aligned}$$

3. ($\Longrightarrow$). évident.

($\Longleftarrow$) Supposons que $R(A) = H$. Alors $R(A)^{\perp} = \{0\}$. Donc $N(A^*) = N(A) = \{0\}$. D'où A est invesible.

□

2.2 Caractérisation des opérateurs à images fermées par le spectre

Théorème 2.2.1. *Soit $A \in B(H)$. Alors on a*

$$R(A) \text{ fermé si et seulement si } 0 \notin acc(\sigma(A^*A)) \ .$$

Preuve. $\Rightarrow$ Supposons que $\mathcal{R}(A)$ est fermé, alors $R(A^*A)$ est fermé aussi. on a

$$\begin{aligned} H &= N(A^*A)^{\perp} \oplus N(A^*A) \\ H &= N(A)^{\perp} \oplus N(A) \\ &= \overline{R(A^*)} \oplus N(A) \\ &= R(A^*) \oplus N(A). \end{aligned}$$

Donc

$$A^*A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

il est facile de vérifier que $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ et $B_1 : \mathcal{R}(A^*) \longrightarrow \mathcal{R}(A^*)$ un opérateur inversible. Par conséquent

$$A^*A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui implique

$$\sigma(A^*A) = \sigma(B_1) \cup \{0\},$$

alors 0 est un point isolé du $\sigma(A^*A)$ et donc $0 \notin acc(\sigma(A^*A))$.
$\Leftarrow$ supposons Maintenant que $0 \notin acc(\sigma(A^*A))$. Alors

cas 1 : Si $0 \notin \sigma(A^*A)$, alors A^*A est inversible. Donc d'après le Théorème 2.1.2,il résulte

$$R(A^*A) \text{ fermé} \Longrightarrow R(A^*) \text{ fermé} \Longrightarrow R(A) \text{ fermé}.$$

cas 2 : $0 \notin acc(\sigma(A^*A))$. Donc on obtient 0 est un point isolé de $\sigma(A^*A)$. Comme

$$H = N(A)^\perp \oplus N(A),$$

Suivant cette somme, on a

$$A^*A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : N(A)^\perp \oplus N(A) \longrightarrow NN(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A).$$

L'opérateur $B_1 = A^*A|_{N(A)^\perp} : N(A)^\perp \longrightarrow N(A)^\perp$ est injectif car

$$B_1(x) = 0 \Rightarrow A^*A(x) = 0 \Rightarrow x \in N(A^*A) = N(A),$$

donc

$$x \in N(A)^\perp \cap N(A) = \{0\} \Rightarrow x = 0.$$

Il est clair que $B_2 = B_4 = 0$.

$$B_3 = A^*A|_{N(A)^\perp} : N(A)^\perp \longrightarrow N(A).$$

$B_3 = 0$ car pour $x \in N(A)^\perp,\ B_3(x) = A^*A(x)$, on obtient

$$\begin{cases} A^*A(x) \in N(A) \\ et \\ A^*A(x) \in R(A^*) \subset \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp. \end{cases}$$

D'où

$$B_3(x) \in N(A) \cap N(A)^\perp = \{0\} \Rightarrow B_3(x) = 0.$$

Par conséquent

$$A^*A = \begin{bmatrix} A^*A|_{\mathcal{N}(A)^\perp} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{N}(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A) \longrightarrow \mathcal{N}(A)^\perp \oplus \mathcal{N}(A).$$

Alors

$$\sigma(A^*A) = \sigma(A^*A|_{\mathcal{N}(A)^\perp}) \cup \{0\}.$$

Montrons que $0 \notin \sigma(A^*A|_{\mathcal{N}(A)^\perp})$.
Supposons par l'absurde que $0 \in \sigma(A^*A|_{N(A)^\perp})$. comme 0 est un point isolé de $\sigma(A^*A)$,alors 0 est un point isolé de $\sigma(A^*A|_{N(A)^\perp})$ et puisque $A^*A|_{N(A)^\perp}$ est auto-adjoint alors 0 est un valeur propre de $A^*A|_{N(A)^\perp}$, ce qui contredit l'injectivité de $A^*A|_{N(A)^\perp}$. On conclut que $0 \notin \sigma(A^*A|_{N(A)^\perp})$.
Donc $A^*A|_{N(A)^\perp}$ est inversible et par suite $R(A^*A)$ est fermé. D'où $R(A)$ est fermé aussi.
□

Corollaire 2.2.1. *Soit T un opérateur auto-adjoint,alors $\mathcal{R}(A)$ fermé si est seulement si $0 \notin acc(\sigma(A))$*

Preuve. Comme

$$\sigma(A^*A) = \sigma(A^2) = (\sigma(A))^2.$$

D'après le Théorème précédent, on déduit que $\mathcal{R}(A)$ fermé si est seulement si $0 \notin acc(\sigma(A))$. □

2.3 Le module minimum réduit

Dans la suite on va étudier une quantité importante pour caractériser les opérateurs à images fermées dans les espaces de Hilbert.

Définition 2.3.1. Soit $T \in B(H)$ non nul. Alors, le minimum réduit de T est :

$$\gamma(T) = \inf\{||Tx|| : x \in (N(T))^\perp, ||x|| = 1\}$$

Exemple 2.3.1. Considérons l'opérateur T défini sur $l^2(\mathbb{N})$ par

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (\lambda_k x_k)_{k\in\mathbb{N}^*},$$

où $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée des nombres réels.
Posons $E = \{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \neq 0\}$, alors $N(T)$ est l'ensemble des éléments de type $y_j = (y_1, y_2, \cdots)$ tels que $y_j \in l_2$ et

$$\begin{cases} y_j = 0, \; sij \in E \\ y_j \neq 0, \; sij \notin E \end{cases}$$

Maintenant, on va calculer le module minimum réduit de T. On a

$$\gamma(T) = \inf\left\{\|T(x)\| : x \in (N(T))^\perp, \|x\| = 1\right\}$$

Pour $x \in (N(T))^\perp$, $d(x, N(T)) \neq 0$.
Soit $x \in l^2(\mathbb{N}$, alors pour tout $y \in N(T)$, on a :

$$\begin{aligned} \| x - y \|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|^2 \\ &= \sum_{k\notin\mathbb{E}} |x_k - y_k|^2 + \sum_{k\in\mathbb{E}} |x_k|^2, \end{aligned}$$

et comme le choix de y_k est arbitraire si $k \notin E$, alors on pose $y_k = x_k$ et $k \notin E$.
D'où :

$$\| x - y \|^2 = \sum_{k \in \mathbb{E}} |x_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |x_k|^2 \leq \| x \|$$

et

$$\begin{aligned}\| T(x) \| = (\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |\lambda_k|^2 |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} &\geq \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (|\lambda_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (|\lambda_k|^2)^{\frac{1}{2}} \| x \| \, | \\ &= \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (|\lambda_k|^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\| T(x) \| \geq \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (|\lambda_k|)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow inf \{ \| T(x) \| \} \geq \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (|\lambda_k|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\gamma(T) \geq \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (|\lambda_k|^2)^{\frac{1}{2}} = m$$

de plus, d'après la définition de la borne inférieur, on a aussi

$$\forall \epsilon > 0, \exists i \in E : |\lambda_i| < m + \epsilon$$

posons $V = (0, 0, \cdots, 1, 0, 0, \cdots) \in l_2$,
alors :

$$x_i = \begin{cases} x_{k_0} = 1 & si \quad i = k_0 \in E \\ 0 & si \quad i \neq k_0 \end{cases}$$

il est clair que $\| V \| = 1$, $V \in N(T)^{\perp}$ et $\| T(V) \| = |\lambda_{k_0}|$, donc

$$m \leq \gamma(T) \leq \| T(V) \| = |\lambda_{k_0}| < m + \epsilon$$

par passage à la limite $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\gamma(T) = m = inf(|\lambda_k|^{\epsilon})^{\frac{1}{2}}$$

La notion du module minimum réduit est motivée par la caractérisation suivante :

Théorème 2.3.1. *Soit $T \in B(H)$. Alors on a :*

$$\gamma(T) > 0 \Longleftrightarrow R(T) \text{ fermé.}$$

Preuve. Si $T = 0$, le résultat est trivial.
Supposons que $T \neq 0$
Soit $\overline{T}$ l'injection canonique définie par

$$\begin{aligned} \overline{T} : X/N(T) &\longrightarrow \quad Y \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{T}\overline{x} = Tx \end{aligned}$$

Donc $\overline{T}(\overline{X}) = T(X)$, mais on sait que $\overline{T}(\overline{X}) = T(X)$ est fermé si seulement si $\overline{T}$ admet un inverse borné. Alors $\exists \ C > 0$ Tel que

$$||\overline{T}\overline{x}|| \geqslant C||\overline{x}||, \quad \text{pour } x \in X.$$

Comme

$$\gamma(T) = \inf_{x \notin N(T)} \frac{||\overline{T}\overline{x}||}{||\overline{x}||} \geq C > 0,$$

On conclut que $R(T)$ est fermé si seulement si $\gamma(T) > 0$. □

2.4 L'inverse de Moore-Penrose

Définition 2.4.1. L'inverse de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{B}(H)$ est l'opérateur $T^+ \in \mathcal{B}(H)$ vérifiant

$$\begin{cases} TT^+T = T. \\ T^+TT^+ = T^+. \\ (TT^+)^* = TT^+. \\ (T^+T)^* = T^+T. \end{cases}$$

Si T^+ existe, alors on dit que T est MP inversible.

Remarque 2.4.1.
- *$0^+ = 0$ et $(\lambda A)^+ = \frac{1}{\lambda}A^+$, pour $\lambda \neq 0$.*
- *Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, $(T^+)^+ = T$.*
- *Si T est inversible alors $T^+ = T^{-1}$.*
- *Si P est une projection alors $P^+ = P_{\mathcal{N}(P)^\perp}P_{\mathcal{R}(P)}$.*
- *Si P est une projection orthogonale alors $P^+ = P$.*
- *TT^+ est une projection orthogonale sur $R(T)$, de noyau $N(T^+)$.*
- *T^+T une projection orthogonale sur $R(T^+)$, de noyau $N(T)$.*

Théorème 2.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T posséde un inverse généralisé.*

(ii) *$R(T)$ est fermé.*

(iii) *T^+ existe et il est unique.*

Preuve. ⋆ (i) $\Longrightarrow$(ii).

Supposons que S est un inverse généralisé de T. Alors TS est un idempotent sur $R(T)$. Donc $R(T)$ est fermé.

⋆ (ii) $\Longrightarrow$(iii).

Si $R(T)$ est fermé, alors $R(T^*)$ est fermé aussi. Par conséquent $H = R(T^*) \oplus N(T) = R(T) \oplus N(T^*)$. Donc T est sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(T^*) \oplus N(T) \to R(T) \oplus N(T^*).$$

où T_1 est un opérateur linéaire borné inversible de $R(T^*)$ dans $R(T)$.

Posons

$$S = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(T) \oplus N(T^*) \to R(T^*) \oplus N(T).$$

On a alors :

$$\begin{cases} TST = T. \\ STS = S. \\ TS = (TS)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{R}(T)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \\ ST = (ST)^* = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{R}(T^*)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Donc S est l'inverse de Moore-Penrose de T.
Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il existe T_1^+, T_2^+ deux inverses de Moore-Penrose de T. Donc TT_1^+, TT_2^+ sont deux projections orthogonales sur $R(T)$ ce qui implique $TT_1^+ = TT_2^+$. En multipliant cette Dernière équation à gauche par T_1^+, et en utilisant la définition de l'inverse Moore-Penrose, on obtient $T_1^+ = T_1^+TT_2^+$. Comme T_1^+T et T_2^+T sont deux projections orthogonales de noyau $N(T)$, alors $T_1^+T = T_2^+T$. Donc $T_1^+ = T_2^+TT_2^+ = T_2^+$.

⋆ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) est vidente.

□

Remarque 2.4.2. *D'après la démonstration du théorème précédent, on conclut que si l'inverse de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{B}(H)$ existe alors :*

- $R(T^+) = R(T^+T) = R(T^*)$.
- $N(T^+) = N(TT^+) = N(T^*)$.
- $H = R(T) \oplus N(T^+)$ *et* $H = R(T^+) \oplus N(T)$.

2.4.1 Quelques relations entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose

le résultat suivant est une conséquence immédiate des deux théorèmes 2.4.1, 2.1.2

Théorème 2.4.2. *Soit $T \in B(E, F)$ alors les proprietés suivantes sont équvalentes :*
(1) T^+ *existe*
(2) $(T^*T)^+$ *existe*
(3) $(TT^*)^+$ *existe*
(4) $(T^*)^+$ *existe*

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'inverse de Moore-Penrose.

Proposition 2.4.3. *Soit $T \in \mathfrak{B}(H)$. Si $R(T)$ est fermé, alors on a :*
(i) $(T^*)^+ = (T^+)^*$.
(ii) $(T^*T)^+ = T^+(T^+)^*$.
(iii) $(TT^*)^+ = (T^+)^*T^+$.
(iv) $T^* = T^+TT^* = T^*TT^+$.
(v) $T^+ = (T^*T)^+T^* = T^*(TT^*)^+$.
(vi) $(T^*)^+ = T(T^*T)^+ = (TT^*)^+T$.

Preuve. (i) D'après la définition de T^+, on obtient :

1. $(T^+)^*T^*(T^+)^* = (T^+TT^+)^* = (T^+)^*$.
2. $T^*(T^+)^*T^* = (TT^+T)^* = T^*$.
3. $(T^*(T^+)^*)^* = T^+T = (T^+T)^* = T^*(T^+)^*$.
4. $((T^+)^*T^*)^* = TT^+ = (TT^+)^* = (T^+)^*T^*$.

Donc $(T^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de T^*.
(ii) Puisque on a :

1. $T^*TT^+(T^+)^*T^*T = T^*TT^+(TT^+)^*T = T^*TT^+TT^+T = T^*T$.
2. $T^+(T^+)^*T^*TT^+(T^+)^* = T^+(TT^+)^*TT^+(T^+)^* = T^+TT^+(T^+)^* = T^+(T^+)^*$.
3. $(T^*TT^+(T^+)^*)^* = T^+TT^+T = T^+T = (T^+T)^* = (TT^+T)^*(T^+)^* = T^*TT^+(T^+)^*$.
4. $(T^+(T^+)^*T^*T)^* = (T^+(T)T^+T)^* = T^+T = T^+(T^+)^*T^*T$.

Donc $T^+(T^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de T^*T.
(iii) Se déduit de (ii), en remplaçant T par T^+.
(iv) Comme T^+T est une projection sur $R(T^*)$, alors on obtient

$$T^* = T^+TT^* = (T^+T)^*T^* = T^*(TT^+)^* = T^*TT^+.$$

(v) Il est bien clair que $T^+ = T^+(T^+)^*T^*$. Par l'utilisation de (ii), on obtient la première égalité de (v). De la même méthode, on trouve la deuxième égalité de (v).
(vi) Se déduit de (v). □

2.4.2 l'inverse de Moore-Penrose de Quelques matrices d'opérateurs (2×2).

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

Théorème 2.4.4. *Soit $A \in B(E)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si A est MP inversible (i.e $R(A)$ fermé) et dans ce cas $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Preuve. Comme $R(T) = R(A)$, alors
T^+ existe $\iff$ R(T) fermé $\iff$ $R(A)$ fermé $\iff$ A^+ existe.
Il est facile de vérifier que $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

Théorème 2.4.5. *Soient $A \in B(E), B \in B(F)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si $R(A)$ et $R(B)$ sont fermés et dans ce cas $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$.*

Preuve. On a $R(A) \oplus R(B) \subset E + F$. Donc

$$\begin{aligned} T\, est\, MP\, inversible &\iff R(T) ferme' \\ &\iff R(A)\ ferme'\ et\ R(B)\ ferme'. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $T^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix}$. □

Théorème 2.4.6. *Soient $A \in B(E)$ et $B \in B(F, E)$, posons $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si $R(A) + R(B)$ est fermé dans E et dans ce cas*

$$T^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve. On a
$$TT^* = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Donc
$$\begin{aligned} R(T) ferme' &\iff R(TT^*) ferme' \\ &\iff R(AA^* + BB^*) ferme' \\ &\iff (AA^* + BB^*)^+ existe. \end{aligned}$$
Dans ce cas
$$R(AA^* + BB^*) = R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) = R(A) + R(B).$$
D'après la proposition 2.4.3, on a
$$T^+ = T^*(TT^*)^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$
□

Théorème 2.4.7. *Soient $A \in B(E,F)$ et $B \in B(F,E)$, posons $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est MP inversible si et seulement si $R(A) + R(B)$ est fermé dans E et dans ce cas*
$$T^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^*(AA^* + BB^*)^+ \\ 0 & B^*(AA^* + BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$

Preuve. On a
$$TT^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AA^* + BB^* \end{bmatrix}.$$
Donc
$$\begin{aligned} R(T) ferme' &\iff R(TT^*) ferme' \\ &\iff R(AA^* + BB^*) ferme' \\ &\iff R((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}) ferme' \\ &\iff R(A) + R(B) ferme'. \end{aligned}$$
Dans ce cas $(AA^* + BB^*)^+$ existe, alors
$$T^+ = T^*(TT^*)^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^*(AA^* + BB^*)^+ \\ 0 & B^*(AA^* + BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$
□

2.4.3 EP opérateurs

Définition 2.4.2. Soit $A \in B(H)$ à image fermée. On dit que A est un EP opérateur si $AA^+ = A^+A$.

Exemple 2.4.1. Si A est inversible, alors A est un EP opérateur ($AA^{-1} = A^{-1}A$)

Théorème 2.4.8. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A EP opérateur*
2. *$R(A) = R(A^*)$.*
3. *$N(A) = N(A^*)$.*
4. *$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*)$, où $A_1 \in B(H)$ inversible.*

Preuve. ($1 \Rightarrow 2$). Supposons que A est EP alors $AA^+ = A^+A$. ce qui donne $R(AA^+) = R(A^+A)$. Donc $R(A) = R(A^*)$.
($2 \Rightarrow 3$). Supposons que $R(A) = R(A^*)$. Alors $R(A)^\perp = R(A^*)^\perp$. Donc $N(A^*) = N(A)$.
($3 \Rightarrow 4$). Supposons $N(A) = N(A^*)$. On a

$$H = N(A^*)^\perp \oplus N(A^*) = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = R(A) \oplus N(A).$$

Donc

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A).$$

Il est clair que $A_2 = A_3 = A_4 = 0$.
Montrons queA_1 est injectif.

$$\begin{aligned} A_1 : R(A) &\longrightarrow R(A) \\ x &\longmapsto A_1(x) = A(x). \end{aligned}$$

Soit $x \in R(A)$ tel que $A_1x = 0 = Ax$. Donc $x \in R(A) \cap N(A) = \{0\}$.
Montrons que A_1 est surjectif
Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ tel que $Ax = y$. On a $x = x_1 \oplus x_2 \in R(A) \oplus N(A)$. Alors $y = Ax = Ax_1 = A_1x_1$ et donc A_1 surjectif.
Comme $R(A)$ est fermé, alors il est complet et puisque A_1 bijectif, alors il est inversible.
($4 \Rightarrow 1$). Supposons

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus N(A),$$

où $A_1 \in B(R(A))$ inversible. puisque $R(A)$ fermé, alors A^+ existe et

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que $AA^+ = A^+A$. □

Remarque 2.4.3. *On a*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*)$$

A est EP oprateur $\iff$ A_1 inversible et $A_2 = 0$.

2.4.4 Opérateur normal à image fermée

Définition 2.4.3. On dit que $T \in B(H)$ est normal si $TT^* = T^*T$.

Proposition 2.4.9. *Soit $A \in B(H)$ un opérateur normal à image fermée. Alors A est un EP opérateur.*

Preuve. Puisque A normal, alors $N(A^*) = N(A)$. Comme $R(A)$ fermé alors d'après le théorème précédent, on trouve que A est EP opérateur. □

Remarque 2.4.4. *L'implication réciproque n'est pas vraie. Il suffit de voir l'exemple suivant :*

Exemple 2.4.2. Soit $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \longrightarrow H$ où A inversible mais n'est pas normal. Alors T n'est pas normal, car

$$TT^* = \begin{bmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^*T$$

Mais

$$TT^+ = \begin{bmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^+T.$$

Alors T est un EP opérateur.

Exemple 2.4.3. Soit $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Donc T n'est pas normal. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $T^+ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il est facile de voir que $TT^+ = T^+T$.

2.4.5 Isométrie partielle

Définition 2.4.4. On dit que $T \in B(H)$ est une isométrie partielle si $||Tx|| = ||x||, \ \forall x \in N(T)^{\perp}$.

Proposition 2.4.10. *Soit $T \in$ B(H) , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *T est une isométrie partielle,*

(2) *T^* est une isométrie partielle,*

(3) *TT^* est une projection orthogonale sur $R(T)$,*

(4) *T^*T est une projection orthogonale sur $Ker(T)^{\perp}$,*

(5) *$TT^*T = T$,*

(6) *$T^*TT^* = T^*$.*

Preuve. Voir le cours du professeur Ameur Seddik . □

Théorème 2.4.11. *Soit $T \in B(H)$ image fermée. Alors*

$$T \textit{ une isomtrie partielle} \iff T^+ = T^*.$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons que T est une isométrie partielle. D'après la proposition précédente, on trouve

$$\begin{cases} T & = TT^*T, \\ T^* & = T^*TT^*, \\ TT^* & = P_{R(T)}, \\ T^*T & = P_{N(T)^\perp}. \end{cases}$$

On conclut que $T^+ = T^*$.
($\Leftarrow$). Supposons que $T^+ = T^*$. Ce qui implique que $T = TT^*T$, D'après la proposition précédente T est une isométrie partielle. $\square$

Corollaire 2.4.1. *Soit $T \in B(H)$ à image fermée. Alors T est une isométrie partielle si et seulement si $T^+ = T^*$.*

2.4.6 Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles

Remarque 2.4.5. *Le produit de deux opérateurs Moore-Penrose inversibles n'est pas toujours Moore-Penrose inversible. Il suffit de voir l'exemple suivant*

Exemple 2.4.4. Soit $A \in B(H)$ tel que $R(A)$ n'est pas fermé. Posons

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; et \; S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & I \end{bmatrix}.$$

T est MP inversible. De plus $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & I \end{bmatrix} = S.S$ Alors S est une projection donc elle est MP inversible. Mais $ST = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas MP inversible car R(A) n'est pas fermé.(R(ST) = R(A))

Théorème 2.4.12. *Soient $A \in B(G,F), B \in B(F,G)$ deux opérateurs à images fermées et soient $Q \in B(G)$ une projection de noyau $N(A)$ et $P \in B(G)$ une projection sur $R(B)$. Alors*

$$AB \; est \; MP inversible \iff QP \; est \; MP inversible.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} AB \; est \; MP inversible &\iff R(AB) ferme' \\ &\iff AR(B) ferme' \\ &\iff AR(P) ferme' \\ &\iff R(AP) ferme' \\ &\iff R((AP)^*) ferme' \\ &\iff R(P^*A^*) ferme' \\ &\iff P^*R(A^*) ferme' \end{aligned}$$

Comme $R(A^*) = N(A)^\perp = N(Q)^\perp = \overline{R(Q^*)} = R(Q^*)$ car Q une projection. Donc

$$\begin{aligned} AB \; est \; MP inversible &\iff P^*R(Q^*) ferme' \\ &\iff R((P^*Q^*)^*) ferme' \\ &\iff R(QP) ferme' \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4.2. *Soient $A \in B(F,G), B \in B(G,F)$ à images fermées. Alors*

$$AB \text{ est } MP\,inversible \iff R(A^+ABB^+) \ ferme'.$$

Preuve. Puisque $A^+A \in B(F)$ est une projection de noyau $N(A)$ et BB^+ est une projection sur $R(B)$. Alors par l'application du théorème précédent, on trouve

$$AB \text{ est } MP\,inversible \iff R(A^+ABB^+) \ ferme'.$$

□

Théorème 2.4.13. *Soient E, F, G des espaces de Hilbert,et $A \in B(G,F), B \in B(E,G)$ à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $(AB)^+AB = B^+A^+AB$
2. $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$

Preuve. (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. Comme

$$R(A^+A) = R(A^+) = R(A^*),$$

alors on trouve $A^+ABB^*A^* = BB^*A^*$. Par passage à l'adjoint, on obtient

$$ABB^*(A^+A)^* = ABB^*,$$

$$ABB^*A^*(A^+)^* = ABB^*$$

En multipliant cette dernière égalité à gauche par $(AB)^+$, on trouve

$$(AB)^+ABB^*A^*(A^+)^* = (AB)^+ABB^*. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a

$$R((AB)^+AB) = R((AB)^+) = R((AB)^*) = R(B^*A^*),$$

donc

$$(AB)^+ABB^*A^* = B^*A^*.$$

De 2.1, on obtient

$$B^*A^*(A^+)^* = (AB)^+ABB^*,$$

on en déduit que

$$B^*A^*(A^+)^*(B^+)^* = (AB)^+ABB^*(B^+)^*.$$

$$\begin{aligned}(B^+A^+AB)^* &= (AB)^+AB(B^+B)^* \\ &= (AB)^+ABB^+B \\ &= (AB)^+AB\end{aligned}$$

Donc

$$(B^+A^+AB)^* = (B^+A^+AB) = ((AB)^+AB)^* = (AB)^+AB.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons maintenant que $(AB)^+AB = B^+A^+AB$.
Comme $(AB)^+AB$ est une projections orthogonale sur B^*A^*, alors $(AB)^+ABB^*A^* = B^*A^*$ et donc

$$B^+A^+ABB^*A^* = B^*A^*.$$

En multipliant cette égalité à gauche par l'opérateur ABB^*B, on obtient

$$ABB^*BB^*A^* = AB(B^*BB^+)A^+ABB^*A^* = ABB^*A^+ABB^*A^*.$$

Par conséquent

$$ABB^*(I - A^+A)BB^*A^* = 0$$

Alors pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} 0 &=< (ABB^*(I - A^+A)BB^*A^*)(x), x > \\ &=< (I - A^+A)BB^*A^*)(x), BB^*A^*(x) > \\ &=< (I - A^+A)BB^*A^*)(x), (I - A^+A)BB^*A^*(x) > \end{aligned}$$

car $I - A^+A$ est un projection orthogonale. Alors

$$(I - A^+A)BB^*A^* = 0.$$

Il s'ensuit que

$$R(BB^*A^*) \subset N(I - A^+A) = R(A^+A) = R(A^*).$$

On conclut que $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. □

Théorème 2.4.14. *Soient $A \in B(G, F)$ et $B \in B(E, G)$ deux opérateurs à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $AB(AB)^+ = ABB^+A^+$

2. $R(A^*AB) \subset R(B)$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} AB(AB)^+ = ABB^+A^+ &\iff (AB(AB)^+)^* = (ABB^+A^+)^* \\ &\iff ((AB)^+)^*B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \\ &\iff ((AB)^*)^+B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \\ &\iff (B^*A^*)^+B^*A^* = (A^*)^+(B^*)^+B^*A^* \end{aligned}$$

Puisque$R(AB)$ fermé, alors $R(B^*A^*)$ est aussi fermé. D'après le théorème précédent, on déduit que

$$AB(AB)^+ = ABB^+A^+ \iff R(A^*AB) \subset R(B).$$

□

Théorème 2.4.15. *Soient $A \in B(G, F), B \in B(E, G)$ deux opérateurs à images fermées. Supposons que $R(AB)$ fermé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $(AB)^+ = B^+A^+$;

(2) $R(A^*AB) \subset R(B)$ *et* $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$.

Preuve.

$1 \Longrightarrow 2$. Cette implication est dérivée à partir des deux Théorèmes 3.2.13 et 3.2.14.

$2 \Longrightarrow 1$. Supposons que $R(A^*AB) \subset R(B)$ et $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. Par l'application des deux théorèmes précédents on trouve :

- $ABB^+A^+AB = AB(AB)^+AB = AB$.
- $(ABB^+A^+)^* = (AB(AB)^+)^* = AB(AB)^+$.
- $(B^+A^+AB)^* = ((AB)^+AB)^* = (AB)^+AB$.

Donc pour obtenir (1), il suffit de montrer que $B^+A^+ABB^+A^+ = B^+A^+$.
On a

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E = R(B^*) \oplus N(B) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*),$$

où $B_1 \in B(R(B^*), R(B))$ est inversible
Dans ce cas on obtient

$$B^+ = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : G = R(B) \oplus N(B^*) \Longrightarrow E = R(B^*) \oplus N(B).$$

D'autre part on a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : G = R(B) \oplus N(B^*) \Longrightarrow F = R(A) \oplus N(A^*).$$

Cela implique que

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^*D^+ & 0 \\ A_2^*D^+ & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(A^*) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*),$$

où $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ est positif dans $R(A)$. .
Comme

$$AA^* = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors $R(D) = R(AA^*) = R(A)$ car $R(A)$ est fermé. Donc : $D : R(A) \longrightarrow R(A)$ est opérateur positif surjectif. D'où il est inversible. Par conséquent

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^*(D)^{-1} & 0 \\ A_2^*(D)^{-1} & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(A^*) \Longrightarrow G = R(B) \oplus N(B^*).$$

Donc

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E = R(B^*) \oplus N(B) \Longrightarrow F = R(A) \oplus N(A^*) \text{ ....(1)}$$

$$(AB)^+ = \begin{bmatrix} (A_1B_1)^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : F = R(A) \oplus N(^A*) \Longrightarrow E = R(B^*) \oplus N(B)\text{........(2)}$$

Comme $R(A^*AB) \subset R(B)$, alors par l'application du théorème précédent on a :
$AB(AB)^+ = ABB^+A^+$ alors de (1)et (2) on obtient :

$$A_1B_1(A_1B_1)^+ = A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1} = A_1B_1A_1^*D^{-1}$$

Alors

$$A_1B_1(A_1B_1)^+A_1B_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1.$$

Il s'ensuit

$$A_1B_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1,$$

$$A_1B_1B_1^{-1} = A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^{-1},$$

$$A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
B^+A^+ABB^+A^+ &= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}(A_1A_1^*D^{-1}A_1)^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= B^+A^+
\end{aligned}$$

Donc $(AB)^+ = B^+A^+$ $\square$

Chapitre 3

Le groupe inverse

3.1 Propriétés du groupe-inverse

Définition 3.1.1. Soit $A \in \mathrm{B}(H)$. Le groupe inverse de A est l'opérateur $B \in \mathrm{B}(H)$ vérifiant :

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \\ AB = BA \end{cases}$$

Si A admet un groupe inverse, alors on dit que A est groupe inversible et on le note par $B = A^{\#}$.

Remarque 3.1.1. *Si $A^{\#}$ existe, alors*

1. *$A^{\#}$ est un inverse généralisé de A.*
2. *$R(A)$ fermé.*
3. *$AA^{\#}$ et $A^{\#}A$ sont deux projections tels que $R(AA^{\#}) = R(A^{\#}A) = R(A)$ et $N(AA^{\#}) = N(A^{\#}A) = N(A)$.*
4. *$A = AA^{\#}A = AA^2A^{\#}$. et $A^{\#} = A^{\#}AA^{\#} = (A^{\#})^2A$.*

Proposition 3.1.1. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors A est un EP opérateur si et seulement si $A^{\#}$ existe et $A^{\#} = A^{+}$.*

Preuve. $(\Rightarrow)$. Supposons que A EP opérateur, i.e. $AA^{+} = A^{+}A$ donc $A^{\#} = A^{+}$.
$(\Leftarrow)$. Maintenant si $A^{\#} = A^{+}$, alors $AA^{+} = A^{+}A$. Par conséquent A est EP. $\square$

Théorème 3.1.2. *Soit $A \in \mathrm{B}(H)$ à image fermée. alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A^{\#}$ existe et il est unique,*
2. *$H = R(A) \oplus N(A)$,*
3. *$R(A^2) = R(A)$ et $N(A^2) = N(A)$,*
4. *$\exists U, W \in \mathrm{B}(H)$ tels que $A^2U = A$ et $WA^2 = A$.*

Preuve. $1 \Rightarrow 2$. Supposons que $A^{\sharp}$ existe, alors $AA^{\sharp} = A^{\sharp}A$. Comme $AA^{\sharp}$ est une projection, on déduit que

$$H = R(AA^{\sharp}) \oplus N(AA^{\sharp}).$$

On a $R(AA^{\sharp}) = R(A)$ et $N(AA^{\sharp}) = N(A^{\sharp}A) = N(A)$. Donc

$$H = R(A) \oplus N(A).$$

$2 \Rightarrow 3$. Supposons que $H = R(A) \oplus N(A)$, alors

$$A(H) = AR(A) \oplus A(N(A)) = R(A^2).$$

Donc $R(A) = R(A^2)$. Comme $N(A) \subset N(A^2)$, alors il suffit de montrer que $N(A^2) \subset N(A)$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in N(A^2) &\Rightarrow A^2x = 0. \\ &\Rightarrow A(Ax) = 0 \\ &\Rightarrow Ax \in N(A) \cap R(A) \\ &\Rightarrow Ax = 0 \\ &\Rightarrow x \in N(A). \end{aligned}$$

Donc $N(A^2) \subset N(A)$.
$3 \Rightarrow 4$. Supposons que $R(A^2) = R(A)$ et $N(A^2) = N(A)$. alors $R((A^*)^2) = R(A^*)$. Donc

$$R(A) \subset R(A^2) \text{ et } R(A^*) \subset R((A^*)^2)$$

Par l'application du théorème de Douglas, il existe deux opérateurs $U, B \in B(H)$, vérifiant :

$$\begin{cases} A = A^2U \\ A^* = (A^*)^2B \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} A = A^2U \\ A = B^*A^2 = WA^2 \ (W = B^*) \end{cases}$$

$4 \Rightarrow 1$ Posons $B = WAU$ et montons que $A^\# = B$..
Montrons maintenant l'unicité de $A^\#$. Supposons par l'absurde que A possède deux groupe inverses $A_1^\# et A_2^\#$ différents. Comme

$$R(A_1^\# A) = R(A) = R(A_2^\# A),$$

et

$$N(A_1^\# A) = N(A) = N(A_2^\# A).$$

Alors

$$A_1^\# A = A_2^\# A = AA_1^\# = AA_2^\#.$$

Donc

$$A_1^\# = A_1^\# AA_1^\# = A_2^\# AA_1^\# = A_2^\#,$$

Ce qui contredit l'hypothèse $A_1^\# \neq A_2^\#$. □

Proposition 3.1.3. *Soient $A, B \in B(H)$. Si $A^\#$ existe, alors on a*

1. $(A^\#)^\# = A$.
2. $(A^*)^\# = (A^\#)^*$.
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $(A^\#)^n = (A^n)^\#$.
4. *Si $AB = BA$ alors $A^\# B = BA^\#$.*

Preuve. 3- Puisque A et $A^{\#}$ commutent, alors pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A^n(A^{\#})^n A^n = (AA^{\#}A)^n = A^n;$$

$$(A^{\#})^n A^n (A^{\#})^n = (A^{\#}AA^{\#})^n = (A^{\#})^n,$$

$$A^n(A^{\#})^n = (AA^{\#})^n = (A^{\#}A)^n = (A^{\#})^n A^n.$$

Donc $(A^{\#})^n = (A^n)^{\#}$.

4- Supposons que $AB = BA$. Alors on a :

$$A^{\#}B = (A^{\#})^2AB = (A^{\#})^2BA = (A^{\#})^2BA^2A^{\#} = (A^{\#})^2ABAA^{\#} = A^{\#}BAA^{\#},$$

et

$$BA^{\#} = BA(A^{\#})^2 = AB(A^{\#})^2 = A^{\#}A^2B(A^{\#})^2 = A^{\#}A^2(A^{\#})^2 = A^{\#}BAA^{\#}.$$

Donc

$$A^{\#}B = BA^{\#}.$$

□

Remarque 3.1.2. *Si A et B sont deux opérateurs groupe-inversibles tels que $AB = BA$, alors de la proposition précédente on déduit que :*

$$A^{\#}B = BA^{\#},\ AB^{\#} = B^{\#}A,\ A^{\#}B^{\#} = A^{\#}B^{\#}.$$

Proposition 3.1.4. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et Soient $A \in B(E)$, $B \in B(F)$. On pose $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$. Alors T est groupe-inversible si et seulement si A et B sont groupe-inversibles. Dans ce cas $T^{\#} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#} \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$.*

Preuve. Supposons que $T^{\#}$ existe et

$$T^{\#} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \in B(E \oplus F)$$

Comme

$$\begin{cases} TT^{\#}T = T \\ T^{\#}TT^{\#} = T^{\#} \\ TT^{\#} = T^{\#}T, \end{cases}$$

alors on obtient

$$\begin{cases} AC_1A = A\ , C_1AC_1 = C_1\ ,\ AC_1 = C_1A \\ et \\ BC_4B = B\ , C_4BC_4 = C_4\ , BC_4 = C_4B. \end{cases}$$

Donc A et B sont G-inversibles et de l'unicité du groupe-inverse, on déduit que

$$A^{\#} = C_1 \text{ et } B^{\#} = C_4$$

Inversement. Supposons maintenant que $A^{\#}$ et $B^{\#}$ existe. On pose

$$D = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#} \end{bmatrix} \in B(E \oplus F).$$

Donc

$$TDT = \begin{bmatrix} AA^{\#}A & 0 \\ 0 & BB^{\#}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = T,$$

$$DTD = \begin{bmatrix} A^{\#}AA^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#}BB^{\#} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & B^{\#} \end{bmatrix} = D,$$

$$TD = \begin{bmatrix} AA^{\#} & 0 \\ 0 & BB^{\#} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\#}A & 0 \\ 0 & B^{\#}B \end{bmatrix} = DT.$$

Par conséquent $T^{\#} = D$.

□

3.2 Opérateurs d'ascente et de descente 1.

Définition 3.2.1. Soit $A \in B(H)$.

1. On appelle l'ascente de A, notée $a(A)$, le plus petit entier naturel n tel que : $N(A^n) = N(A^{n+1})$.

   $$a(A) = asc(A) = \inf \{n \in \mathbb{N} : N(A^n) = N(A^{n+1})\}.$$

   Si un tel entier n'existe pas, on pose $a(A) = \infty$.
2. On appelle la descente de A, notée $d(A)$, le plus petit entier naturel n tel que $R(A^n) = R(A^{n+1})$.

   $$d(A) = dsc(A) = \inf \{n \in \mathbb{N} : R(A^n) = R(A^{n+1})\}.$$

   Si un tel entier n'existe pas, on pose $d(A) = \infty$.

Remarque 3.2.1. *Si $A \in B(H)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$a(A) < \infty$ et $d(A) < \infty$;*
2. *$a(A) = d(A)$;*
3. *Il existe $k \in \mathbb{N}$, $H = N(A^k) \oplus R(A^k)$.*

Corollaire 3.2.1. *Soit $A \in B(H)$. Alors*

$$A \text{ est groupe inversible} \Leftrightarrow ind(A) \leq 1.$$

Preuve. Application directe du théorème 3.1.2. □

Proposition 3.2.1. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors on a*

1. $$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$
2. *A est groupe-inversible si et seulement si A_1est inversible.*
   Dans ce cas $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$

Preuve. 2) $\Rightarrow$. On a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

$\square$

Supposons que $A^{\#}$ existe. On pose

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

Comme

$$\begin{cases} AA^{\#}A = A \\ A^{\#}AA^{\#} = A^{\#} \\ AA^{\#} = A^{\#}A, \end{cases}$$

alors on trouve

$$\begin{cases} A_1C_1A_1 = C_1 \\ C_1A_1C_1 = C_1 \\ A_1C_1 = C_1A_1 \end{cases}$$

On conclut que A_1 est G-inversible et donc $ind(A_1) \leq 1$.

Montrons que A_1 inversible.

Soit $y \in R(A)$, alors $\exists x \in H$ tel que $A(x) = y$. Comme A est G-inversible, alors

$$H = R(A) \oplus N(A),$$

et donc $\exists x_1 \in R(A)$, $\exists x_2 \in N(A)$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Ce qui implique

$$y = A(x) = A(x_1) = A_1(x_1)$$

Donc A_1 est surjectif. Par conséquent $d(A_1) = 0$. Puisque $ind(A_1) \leq 1$, alors $a(A_1) = d(A_1) = 0$ et donc A_1 inversible.
Inversement. Supposons que A_1 inversible et posons

$$C = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} ACA = C \\ CAC = C \\ AC = CA, \end{cases}$$

Donc $A^{\#} = C$.

Chapitre 4

L'inverse de Drazin

Définition 4.0.2. Soit $A \in \mathrm{B}(H)$. On dit que l'opérateur $B \in \mathrm{B}(H)$ est l'inverse de Drazin de A d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si les conditions suivantes sont vérifiées : :

$$\begin{cases} AB = BA \\ BAB = B \\ A^{k+1}B = A^k \end{cases}$$

On note l'inverse de Drazin par A^D et on dit que A est Drazin-inversible.

Remarque 4.0.2. *Si A^D existe, alors*

1) *A^D est un inverse extérieur de A*
2) *AA^D et A^DA sont deux projections*
3) *Si A inversible, $A^D = A^{-1}(k = 0)$*
4) *Si $k = 1$, $A^D = A^{\#}$*
5) *Si A est EP opérateur, alors $A^+ = A^D = A^{\#}$*
6) *Si P une projection, alors $P^D = P^{\#} = P$*
7) *Si P une projection orthogonal, alors $P^+ = P^D = P^{\#} = P$.*

Théorème 4.0.2. *Soit $A \in B(H)$. Alors*

$$A \ est \ Drazin - inversible \iff ind(A) < \infty.$$

Preuve. $(\Rightarrow)$. Supposons que A est Drazin-inversible d'ordre $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{cases} AA^D = A^DA ...(1) \\ A^DAA^D = A^D ...(2) \\ A^{k+1}A^D = A^k ...(3) \end{cases}$$

De l'équation (3), On a $R(A^k) = R(A^{k+1}A^D) \subset R(A^{k+1})$. Donc $R(A^k) \subset R(A^{k+1})$ et comme $R(A^{k+1}) \subset R(A^k)$, alors $R(A^{k+1}) = R(A^k)$. Donc $d(A) \leq k < \infty$.
De (1) et (3) il résulte $A^DA^{k+1} = A^k$. Donc $N(A^{k+1}) \subset N(A^k)$ et comme $N(A^k) \subset N(A^{k+1})$, alors $N(A^k) \subset N(A^{k+1})$. D'où $a(A) \leq k < \infty$. Par conséquent $ind(A) < \infty$.
Inversement. Supposons que $ind(A) = n < \infty$. Si $n = 0$, alors A inversible et donc $A^D = A^{-1}$. Maintenant, si $n \geq 1$, alors $R(A^n)$ fermé et $H = R(A^n) \oplus N(A^n)$. Suivant cette somme on trouve :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n).$$

Montrons que A_1 inversible.
Soit $x \in R(A^n)$

$$\begin{aligned} A_1(x) = 0 &\iff A(x) = 0 \\ &\iff A^{n-1}A(x) = 0 \\ &\iff A^n(x) = 0 \\ &\iff x \in R(A^n) \cap N(A^n) = \{0\} \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Donc A_1 injectif.

Soit $y \in R(A^n)$. Comme $d(A) = n$, alors $R(A^n) = R(A^{n+1})$. Ce qui implique $y \in R(A^{n+1})$. Donc il existe $x \in H$ tel que $y = A^{n+1}(x) = AA^n(x)$. On pose $z = A^n(x) \in R(A^n)$, alors on conclut que $y = A(z) = A_1(z)$ et donc A_1 surjectif. Par conséquent A est bijectif et donc inversible car $R(A^n)$ fermé.

$A_2 : N(A^n) \longrightarrow R(A^n)$, $A_2(x) = A(x)$.

Soit $x \in N(A^n)$, Puisque $a(A) = n$, alors $N(A^n) = N(A^{n+1})$. Donc $x \in N(A^{n+1})$ et il s'ensuit :

$$A^{n+1}(x) = 0 \Longrightarrow A^n A(x) = 0 \Longrightarrow A(x) \in N(A^n) \cap R(A^n) = \{0\}.$$

Donc $A_2 = 0$.

$A_3 : R(A^n) \longrightarrow N(A^n)$, $A_3(x) = A(x)$.

Soit $x \in R(A^n)$, alors $A_3(x) = A(x) \in R(A^{n+1}) = R(A^n)$, car $d(A) = n$. Donc

$$A_3(x) \in R(A^n) \cap N(A^n) = \{0\}.$$

D'où $A_3 = 0$.

$A_4 : N(A^n) \longrightarrow N(A^n)$, $A_4(x) = A(x)$.

Alors pour $x \in N(A^n)$, $A_4^n(x) = A^n(x) = 0$. Donc A_4 est nilpotent d'ordre n.

Par conséquent si $ind(A) = n < \infty$, alors

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n),$$

où $A_1 \in B(R(A^n))$ inversible et $A_4^n = 0$.
Posons

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n)$$

et montrons que B est l'inverse de Drazin de A d'ordre n. On a

1. $BA = \begin{bmatrix} I_{R(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AB.$
2. $BAB = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$
3. $A^{n+1}B = \begin{bmatrix} A_1^{n+1} & 0 \\ 0 & A_4^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{n} & 0 \\ 0 & A_4^{n} \end{bmatrix} = A^n.$

Donc A est Drazin-inversible d'ordre n. □

Remarque 4.0.3. *Supposons que A est Drazin-inversible d'ordre k. De la preuve du théorème précédent, on déduit que :*

1. *$R(A^D) = R(A^k)$ et $N(A^D) = N(A^k)$.*
2. *$R(A^D)$ fermé .*
3. *$AA^D = A^D A$ des projections sur $R(A^k)$ et de noyau $R(A^k)$.*
4. *$H = R(A^k) \oplus N(A^k) = R(A^D) \oplus N(A^k)$.*

Théorème 4.0.3. *L'inverse de Drazin d'un opérateur est unique.*

Preuve. Soit $A \in B(H)$. Supposons par l'absurde que A possède deux inverses de Drazin différents A_1^D et A_2^D. Alors $A_1^D A$ et $A_2^D A$ sont deux projections sur $R(A^k)$ et ils ont le même noyau $N(A^k)$, donc $A_1^D A = A_2^D A$. Par conséquent :

$$A_1^D = A_1^D A A_1^D = A_2^D A A_1^D = A_2^D A A_2^D = A_2^D.$$

Ce qui contredit l'hypothèse $A_1^D \neq A_2^D$. □

Proposition 4.0.4. *(Propriétés de l'inverse de Drazin) On suppose que A est Drazin-inversible d'ordre k, alors on a :*

1. *$(A^D)^*$ est l'inverse de Drazin de A^* d'ordre k.*
2. *$(A^n)^D = (A^D)^n$, Pour tout $n \in \mathbb{N}$*
3. *Pour $p \geq k$, $ind(A^k) \leq 1$ et $(A^p)^D = (A^p)^\# = (A^D)^p$.*
4. *$(A^D)^D = (A^D)^\# = A^2 A^D$*
5. *$(A^D)^D = A \iff ind(A) \leq 1$.*

Preuve. (1)

$$A^*(A^D)^* = (A^D A)^* = (AA^D)^* = (A^D)^* A^*$$
$$(A^D)^* A^* (A^D)^* = (A^D A A^D)^* = (A^D)^*$$
$$(A^*)^{k+1}(A^D)^* = (A^{k+1})^*(A^D)^* = (A^D A^{k+1})^* = (A^{k+1} A^D)^* = (A^k)^* = (A^*)^k.$$

Donc $(A^*)^D = (A^D)^*$.
(2), (3), (4) et (5) : voir le corrigé des exercices 5 et 6, série 3.

□

Chapitre 5

Exercices corrigés

Dans toute la suite V, W deux espaces vectoriels sur le même corps K et H un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soient $A : V \longrightarrow W$, $B : W \longrightarrow V$ Deux applications linéaires. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *B est un inverse intérieur de A,*

(2) *$(AB)^2 = AB$ et $R(AB) = R(A)$,*

(3) *$(BA)^2 = BA$ et $N(BA) = N(A)$,*

(4) *$(BA)^2 = BA$ et $R(A) \cap N(B) = \{0\}$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2).(voir le cours).
(2) $\Rightarrow$ (3). Montrons que $(BA)^2 = BA$.
De (2), on déduit que AB une projection sur $R(A)$. Donc on trouve

$$(BA)^2 = B(ABA) = BA.$$

Montrons que $N(BA) = N(A)$.
Puisque $N(A) \subset N(BA)$, alors il suffit de prouver que $N(BA) \subset N(A)$. Comme AB est une projection, alors

$$W = N(AB) \oplus R(AB) = N(AB) \oplus R(A)$$

Soit $x \in N(BA)$, alors $BAx = 0$. Donc

$$\begin{cases} Ax \in N(B) \subset N(AB) \\ et \\ Ax \in R(A) \end{cases}$$

Ce qui implique que $Ax \in N(AB) \cap R(A) = \{0\}$. Alors Ax. Donc $x \in N(A)$. D'où $N(BA) = N(A)$.
(3) $\Rightarrow$ (4). Soit $x \in R(A) \cap N(B)$, alors

$$\begin{cases} \exists z \in V; x = Az \\ et \\ Bx = 0 \end{cases}$$

Donc $BAz = 0$. On déduit que $z \in N(BA) = N(A)$. Par conséquent $x = Az = 0$.
(4) $\Rightarrow$ (1). On a $(BA)^2 = BA$ et $R(A) \cap N(B) = \{0\}$. Montrons que $N(BA) = N(A)$.
Soit $x \in N(BA)$, alors $BAx = 0$. Donc

$$\begin{cases} Ax \in N(B) \\ et \\ A(x) \in R(A) \end{cases}.$$

Ceci implique que $A(x) \in N(B) \cap R(A) = \{0\}$. Alors $A(x) = 0$. Par conséquent $x \in N(A)$
Montrons $ABA = A$.
Soit $x \in V$. comme BA une projection dans V, alors $V = N(BA) \oplus R(BA) = N(A) \oplus R(BA)$. Suivant cette décomposition, $\exists x_1 \in N(A), \exists x_2 \in R(BA)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors

$$\begin{aligned} ABA(x) &= ABA(x_1 + x_2) \\ &= ABA(x_2) \quad car \ x_2 \in R(BA). \end{aligned}$$

Comme $x_2 \in R(BA)$, il exists $z \in V$ tel que $x_2 = BA(z)$. Alors

$$ABA(x_2) = ABABA(z) = ABA(z) = A(x_2) = A(x_1 + x_2).$$

□

Exercice 2. *Soient $A : V \longrightarrow W$, $B : W \longrightarrow V$ Deux applications linéaires. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *B est un inverse extérieur de A,*
(2) *$(BA)^2 = BA$ et $R(BA) = R(B)$,*
(3) *$(AB)^2 = AB$ et $N(AB) = N(B)$,*
(4) *$(AB)^2 = AB$ et $R(B) \cap N(A) = \{0\}$.*

Preuve. La preuve cette exercice est analogue à la preuve de l'exercice 1. □

Exercice 3. *Soient U un espace vectoriel et $T_1 : V \to W$, $T_2 : U \to V$, deux applications linéaires.*

(1) *Supposons que G_1 et G_2 sont deux inverses extérieurs de T_1 et T_2, respectivement. Montrer que :*
$$G_2G_1 \text{ est un inverse extérieur de } T_1T_2 \Leftrightarrow T_2G_2G_1T_1 \text{ est une projection.}$$
(2) *Supposons que S_1 et S_2 sont deux inverses intérieurs de T_1 et T_2, respectivement. Montrer que :*
$$S_2S_1 \text{ est un inverse intérieur de } T_1T_2 \Leftrightarrow S_1T_1T_2S_2 \text{ est une projection.}$$

Preuve. ($\Rightarrow$). Supposons $G_2G_1T_1T_2G_2G_1 = G_2G_1$.
On a

$$(T_2G_2G_1T_1)^2 = T_2(G_2G_1T_1T_2G_2G_1)T_1 = T_2G_2G_1T_1.$$

Donc $T_2G_2G_1T_1$ est une projection.
($\Leftarrow$). Supposons $T_2G_2G_1T_1T_2G_2G_1T_1 = T_2G_2G_1T_1 = T_2G_2G_1T_1$. Cela nous donne

$$G_2(T_2G_2G_1T_1T_2G_2G_1T_1)G_1 = G_2(T_2G_2G_1T_1)G_1.$$

Comme $G_2T_2G_2 = G_2$ et $G_1T_1G_1 = G_1$, on conclut que

$$G_2G_1T_1T_2G_2G_1 = G_2G_1.$$

La preuve de (2) est analogue à la preuve de (1). □

Exercice 4. *Soit $Q \in B(H)$ un idempotent. Montrer que $Q^+ = P_{N(Q)^\perp} P_{R(Q)}$.*
(P_M une projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé M de H).

Preuve. Comme Q est un idempotent (projection), alors $R(Q)$ fermé et donc Q^+ existe. Par l'application des propriétés de l'inverse de Moore-Penrose, on obtient

$$Q^+ = Q^+ Q Q^+ = Q^+ Q Q Q^+ = P_{N(Q)^\perp} P_{R(Q)}.$$

□

Exercice 5. *Soient $A, B \in B(H)$ à images fermées. Supposons que $AB^* = A^*B = 0$. Montrer que :*

(1) $A^+B = BA^+ = AB^+ = B^+A = 0$.

(2) $(A+B)^+ = A^+ + B^+$.

Exercice 6. *Soit $A \in B(H)$ tel que $\|A\| \leq 1$. Montrer que si A possède un inverse généralisé B vérifiant $\|B\| \leq 1$, alors on a*

(c) $\|A\| = \|B\| = 1$.

(d) *Pour tout $x \in H$, $<(I - A^*A)Bx, Bx> = 0$.*

(f) *A est une isométrie partielle telle que $A^+ = B$.*

Exercice 7. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *A est auto-adjoint,*

(2) $AAA^+ = A^*$,

(3) $AA^*A^+ = A$.

Preuve. (1) $\Longrightarrow$ (2). Supposons que A auto-adjoint i.e $A = A^*$. Donc A est EP, ce qui implique que

$$AAA^+ = AA^+A = A = A^*.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons que $AAA^+ = A^*$. On a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*),$$

où $D = A_1 A_1^* + A_2 A_2^*$ inversible dans $R(A)$.

De $AAA^+ = A^*$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = A_1^* \\ A_2^* = 0 \Rightarrow A_2 = 0. \end{cases}$$

Donc A est auto-adjoint.
De même, on montre (1) $\Longleftrightarrow$ (3). □

Exercice 8. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Supposons que A est EP. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(A^n)$ fermé et que $(A^n)^+ = (A^+)^n$.*

Preuve. Supposons que A est EP, alors $R(A)$ fermé et $AA^+ = A^+A$. Alors $d(A) \leq 1$. Donc

$$R(A^n) = R(A), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

D'où $R(A^n)$ fermé et donc $(A^n)^+$ existe.

Montrons que $(A^n)^+ = (A^+)^n$. Comme $AA^+ = A^+A$, on a :

$A^n(A^+)^nA^n = (AA^+A)^n = A^n$

$(A^+)^nA^n(A^+)^n = (A^+AA^+)^n = (A^+)^n$

$A^n(A^+)^n = (AA^+)^n = AA^+$ une projection orthogonale.

$(A^+)^nA^n = (A^+A)^n = A^+A$ une projection orthogonale.

Par conséquent, $(A^n)^+ = (A^+)^n$. □

Exercice 9. *Soient $T, S \in B(H)$, tel que $R(T)$ fermé.*

(1) Montrer que si $TT^+S = S$, alors $R(T + S) \subset R(T)$.

(2) Supposons que $\|T^+S\| < 1$ et $TT^+S = S$. Montrer que $R(T + S) = R(T)$. Déterminer dans ce cas $(T + S)^+$

(3) Montrer les équivalences suivantes :

$$ST^+T = S \Leftrightarrow N(T) \subset N(S) \Leftrightarrow N(T) \subset N(T + S).$$

(4) Supposons que $\|ST^+\| < 1$ et $ST^+T = S$. Montrer que $N(T) = N(T + S)$.

(5) Supposons que T injectif et $\|ST^+\| < 1$. En déduire que $T + S$ injectif.

Exercice 10. *Soit $A = f \otimes e \in B(H)$ un opérateur de rang 1.*

(1) *Vérifier que A est MP inversible.*

(2) *Montrer que $A^+ = e \otimes f_1$, et déterminer f_1.*

(3) *En déduire que $\|A^+\| = \dfrac{1}{\|A\|}$.*

Preuve. 1. Soient $e, f \in H$.
$\forall x \in H : A(x) = f \otimes e(x) =< x, e > f$. Donc $R(A) = [\{f\}]$ de dimension 1 et donc $R(A)$ fermé. Par conséquent A^+ existe et $R(A^+) = R(A^*) = [\{e\}]$. Dans ce cas

$$A^+ = e \otimes f_1$$

Maintenant, on va déterminer f_1.
Comme $R(AA^+) = R(A^+) = [e]$, alors :

$$A^+A(e) = e.$$

D'autre part

$$A^+A(e) = e \otimes f_1(A(e)) =< A(e), f_1 > e.$$

Puisque
$$A(e) = f \otimes e(e) =< e, e > f =< e, e > f = ||e||^2 f.$$
Alors
$$A^+A(e) =< ||e||^2 f, f_1 > e = ||e||^2 < f, f_1 > e = e.$$
Donc
$$||e||^2 < f, f_1 >= 1.$$
Ce qui implique
$$< f, f_1 >= \frac{1}{||e||^2}. \qquad (1)$$
On a
$$\begin{aligned} H &= R(A) \oplus N(A^*) \\ &= [\{f\}] \oplus N(A^*). \end{aligned}$$
Comme $f_1 \in H$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f_1 = \alpha f + g$ avec $g \in N(A^*)$ et $g \perp f$. Montrons que $g = 0$. on a
$$\begin{aligned} < f, f_1 > &= < f, \alpha f + g > \\ &= \overline{\alpha}||f||^2 + < f, g > \\ &= \overline{\alpha}||f||^2 \qquad (2) \end{aligned}$$
Comme $N(T^+) = N(T^*)$,$A^+g = 0$, donc
$$\begin{aligned} A^+(f_1) &= A^+(\alpha f + g) \\ &= \alpha A^+(f) + A^+(g) \\ &= \alpha A^+(f). \\ &= \alpha e \otimes f_1(f) \\ &= \alpha < f, f_1 > e \\ &= \alpha\overline{\alpha}||f||^2 e \qquad by\,(2) \\ &= |\alpha|^2||f||^2 e \qquad (*) \end{aligned}$$
D'autre part on a
$$A^+(f_1) = e \otimes f_1(f_1) =< f_1, f_1 > e = ||f_1||^2 e,$$
avec
$$||f_1||^2 = ||\alpha f + g||^2 = ||\alpha f||^2 + ||g||^2,$$
car $f \perp g$. D'où
$$||f_1||^2 = |\alpha|^2||f||^2 + ||g||^2.$$
Donc
$$A^+(f_1) = ||f_1||^2 e = (|\alpha|^2||f||^2 + ||g||^2)e. \qquad (**)$$

De (*) et (**), on trouve $||g|| = 0$, d'où $g = 0$. Alors $f_1 = \alpha f$.
Comme $< f, f_1 >= \frac{1}{||e||^2}$. Donc $< f, \alpha f >= \frac{1}{||e||^2}$. Alors

$$\overline{\alpha}||f_|||^2 = \frac{1}{||e||^2}.$$

Ce qui implique

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{||e||^2||f||^2} = \alpha.$$

On conclut que

$$f_1 = \frac{1}{||e||^2||f||^2} f = ||e||^{-2}||f||^{-2} f.$$

2. On a

$$\begin{aligned} A^+(x) &= e \otimes (|e||^{-2}|f||^{-2} f)(x) \\ &=< x, (||e||^{-2}||f||^{-2} f > e \\ &= ||e||^{-2}||f||^{-2} e \otimes f(x). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} ||A^+|| &= ||e \otimes f_1|| \\ &= ||e||||f_1|| \\ &= ||e||||e||^{-2}||f||^{-2}||f|| \\ &= ||e||^{-1}||f||^{-1} \\ &= \frac{1}{||e||||f||} \\ &= \frac{1}{f \otimes e} = \frac{1}{||A||}. \end{aligned}$$

□

Exercice 11. *Soient H un espace de Hilbert complexe, $A, B \in B(H)$ deux opérateurs à images fermées et $P \in B(H)$ une projection orthogonale vérifiant :*

$$A^*P = PA^* \quad et \quad B^*P = PB^*.$$

(1) *Montrer que $(A^*A)^+P = P(A^*A)^+$ et $(B^*B)^+P = P(B^*B)^+$.*

2) *En déduire que $A^+P = PA^+$ et $B^+P = PB^+$.*

(3) *Montrer que $(AP)^+ = A^+P$ et $(B(I-P))^+ = B^+(I-P)$.*

Preuve. (1)- On a $A^*P = PA^*$ et $B^*P = PB^*$. Comme P une projection orthogonale, par passage à l'adjoint on trouve :

$$AP = PA \text{ et } BP = PB$$

Donc

$$A^*AP = PA^*A \text{ et } B^*BP = PB^*B \text{.............(*)}$$

On a A^*A et B^*B sont auto-adjoints, alors il sont EP. Donc ils sont groupe-inversibles et

$$(A^*A)^\# = (A^*A)^+ \text{ et } (B^*B)^\# = (B^*B)^+.$$

De (*), on a

$$(A^*A)^{\#}P = P(A^*A)^{\#} \text{ et } (B^*B)^{\#}P = P(B^*B)^{\#}.$$

Par conséquent

$$(A^*A)^+P = P(A^*A)^+ \text{ et } (B^*B)^+P = P(B^*B)^+.$$

(2)- Comme $A^+ = (A^*A)^+A^*$ et P commutent avec A^* et avec $(A^*A)^+$, alors on déduit que

$$A^+P = (A^*A)^+A^*P = P(A^*A)^+A^* = PA^+.$$

De même,

$$B^+P = (B^*B)^+B^*P = P(B^*B)^+B^* = PB^+.$$

(3)- Pour montrer que $(AP)^+ = A^+P$, il suffit de vérifier les 4 equations de l'inverse de Moore-Penrose. Alors de (1) et (2), on trouve

$APA^+PAP = AA^+AP^3 = AP$

$A^+PAPA^+P = A^+AA^+P^3 = A^+P.$

$(APA^+P)^* = (AA^+P)^* = PAA^+ = AA^+P = APA^+P$

$(A^+PAP)^* = (A^+AP)^* = PA^+A = A^+AP = A^+PAP.$

De la même méthode on montre $(BP)^+ = B^+P$

□

Exercice 12. *Soient $A \in B(H)$ un EP-opérateur et $P \in B(H)$ une projection orthogonale sur $R(A)$.*

(1) *Montrer que AP est Moore-Penrose inversible.*
(2) *Montrer que AP est EP.*

Preuve. 1) Comme P est une projection orthogonale sur $R(A)$, alors

$$R(AP) = AR(P) = AR(A) = R(A^2) = R(A), \text{ car } A \text{ est EP.}$$

Puisque $R(AP)$ est fermé, alors $(AP)^+$ existe.
2) Montrons que $(AP)^+ = P^+A^+ = PA^+$.
On a

$$R(A^*AP) = A^*R(AP) = A^*R(A) = R(A^*A) = R(A^*) = R(A) = R(P),$$

car A EP alors $R(A^*) = R(A)$. et

$$R(PP^*A^*) = R(PA^*) = R(A^*)., \text{ car } A \text{ EP alors } R(A^*) = R(A).$$

Donc $(AP)^+ = P^+A^+ = PA^+$.
3) Montrons que AP est EP. Il suffit de monter que $R(AP) = R(AP)^*$
On a

$$R(AP)^* = R(P^*A^*) = R(PA^*) = R(A) = R(AP), \text{ car } A \text{ EP alors } R(A^*) = R(A).$$

Donc AP est EP. □

Exercice 13. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est normal,*

(2) *$AA^*A^+ = A^*$ et $a(A) < +\infty$,*

(3) *$A^+A^*A = A^*$ et $d(A) < +\infty$.*

Preuve. $1 \Longrightarrow 2$.
Si A normal à image fermée, alors $H = R(A) \oplus N(A)$. Donc $a(A) = d(A) \leq 1$. On a

$$AA^*A^+ = A^*AA^+ = (AA^+A)^* = A^*.$$

$2 \Longrightarrow 1$. Supposons que $AA^*A^+ = A^*$ et $a(A) < \infty$. Puisque $H = R(A) \oplus N(A^*)$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

Posons $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*0$, alors $D \geq 0$ et $R(D) = R(AA^*) = R(A)$. Donc D un opérateur positif surjectif. Par conséquent il est inversible dans $R(A)$.
D'autre part on a :

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

De $AA^*A^+ = A^*$, on obtient

$$\begin{bmatrix} DA_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} DA_1^*D^{-1} = A_1^* \,(1) \\ A_2^* = 0 \Rightarrow A_2 = 0. \end{cases}$$

Montrons que A_1 est normal.
Puisque $A_2 = 0$, alors $D = A_1A_1^*$. Ce qui implique que $A_1A_1^*D^{-1} = I$. On déduit que A_1 est inversible à droite et donc l'opérateur est surjectif. Par conséquent $d(A_1) = 0$. D'où $a(A_1) = d(A_1) = 0$, car $a(A) < \infty$. . Finalement il A_1 est inversible.
De la relation (1), on trouve :

$$\begin{aligned} DA_1^*D^{-1} = A_1^* &\iff DA_1^*D^{-1}D = A_1^*D; \\ &\iff DA_1^* = A_1^*D, \\ &\iff A_1A_1^*A_1^* = A_1^*A_1A_1^*, \\ &\iff A_1A_1^* = A_1^*A_1; \\ &\iff A_1 normal. \end{aligned}$$

On conclut que A est normal.

(1) $\Longrightarrow$ (3).

Puisque A normal à image fermée, alors $d(A) < \infty$. et

$$A^+A^*A = A^+AA^* = A^*, \text{ car } R(A^+A) = R(A^*).$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). On a $H = R(A^*) \oplus N(A)$. Donc

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A),$$

où $D = A_1^*A_1 + A_2^*A_2 \in B(R(A^*))$ inversible.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A),$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} D^{-1}A_1^* & D^{-1}A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A).$$

De $A^+A^*A = A^*$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} D^{-1}A_1^*D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} D^{-1}A_1^*D = A_1^* \, (*) \\ A_3^* = 0 \Rightarrow A_3 = 0. \end{cases}$$

Alors $D = A_1^*A_1 \Longrightarrow D^{-1}A_1^*A_1 = I$. Donc A_1 injectif, car il est inversible à gauche. D'ù $d(A_1) = a((A_1)) = 0$. On conclut que A_1 inversible. De la relation (*), on déduit que

$$\begin{aligned} D^{-1}A_1^*D = A_1^* &\Longleftrightarrow DD^{-1}A_1^*D = DA_1^*; \\ &\Longleftrightarrow A_1^*D = DA_1^*, \\ &\Longleftrightarrow A_1^*A_1^*A_1 = A_1^*A_1A_1^*, \\ &\Longleftrightarrow A_1^*A_1 = A_1A_1^*; \\ &\Longleftrightarrow A_1 normal. \end{aligned}$$

On conclut que A est normal.

□

Exercice 14. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée et soit $A = UP$ la décomposition polaire de A. Alors on a*

(1) $A^+ = P^+U^*$ *et* $P^+ = A^+U$

(2) $PP^+ = P^+P = A^+UP = A^+A$,

Preuve. Supposons que $A \in B(H)$ à image fermé, alors il existe $U \in B(H)$ une isométrie partielle telle que

$$A = UP, \text{ avec } \mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(|A|) \text{ et } P = |A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $R(P) = R((T^*T)^{\frac{1}{2}}) = R(A^*)$, alors P^+ existe et en plus $PP^+ = P^+P$, car P un opérateur positif. Ainsi, Comme U est une isométrie partielle, alors $U^+ = U^*$. D'autre part on a :

$$\begin{cases} R(U^*UP) = R(P) \\ et \\ R(PP^*U^*) \subset R(P) = R(U^*) \end{cases}.$$

Donc

$$A^+ = (UP)^+ = P^+U^+ = P^+U^*.$$

Montrons maintenant que $P^+ = A^+U$. On a

$$\begin{aligned} A^+U &= P^+U^*U \\ &= ((U^*U)^*(P^+)^*) \\ &= (U^*U(P^*)^+) \\ &= (U^*UP^+)^*. \end{aligned}$$

Puisque P est un EP, alors

$$R(P^+) = R(P) = R(A^*) = R(U^*U).$$

Il résulte

$$A^+U = (P^+)^* = P^+, \ car\ P \geq 0.$$

Puisque P est EP, alors $PP^+ = P^+PA^+UP = A^+A = U^*U$. □

Exercice 15. *Soit $A \in B(H)$. Supposons que A est groupe-inversible. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *A est un EP-opérateur.*

(2) *$R(A) \subset R(A^*)$.*

(3) *$R(A^*) \subset R(A)$.*

(4) *$N(A) \subset N(A^*)$.*

(5) *$N(A^*) \subset N(A)$.*

Preuve. (1) $\Longrightarrow$ (2) Comme A est EP, alors $R(A) = R(A^*)$. Donc (2) est vérifié.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $R(A) \subset R(A^*)$. Comme A est G-inversible, alors $R(A)$ fermé et $H = N(A) \oplus R(A)$.

Donc $N(A) \oplus R(A) = N(A) \oplus R(A^*)$ et puisque $R(A) \subset R(A^*)$, alors on déduit que $R(A) = R(A^*)$.
De même on montre $1 \Leftrightarrow 2$.
(1) $\Longrightarrow$ (3) Comme A est EP, alors $N(A) = N(A^*)$. Donc (3) est vérifié.
(3) $\Longrightarrow$ (1) Comme A est G-inversible, alors $R(A)$ fermé et $H = N(A) \oplus R(A)$.
Donc $N(A) \oplus R(A) = N(A^*) \oplus R(A)$ et puisque $N(A) \subset N(A^*)$, alors on en déduit que $N(A) = N(A^*)$. □

Exercice 16. *Soit H un espace de Hilbert et $A, C \in B(H)$. Supposons que C est un opérateur inversible.*

(1) Supposons que CAC^{-1} est groupe-inversible. Montrer l'existence de deux opérateurs $V, W \in B(H)$, tels que

$$A^2C^{-1}VC = A \text{ et } C^{-1}WCA^2 = A.$$

(2) Montrer que $A^{\#}$ existe si et seulement si CAC^{-1} est groupe-inversible.

Preuve. 1)- Supposons que CAC^{-1} groupe-inversible, alors il existe $V, W \in B(H)$, tels que

$$\begin{cases} (CAC^{-1})^2V = CAC^{-1} \\ W(CAC^{-1})^2 = CAC^{-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} CA^2C^{-1}V = CAC^{-1} \\ WCA^2C^{-1} = CAC^{-1} \end{cases}$$

En multipliant ces deux dernières équations à gauche par C^{-1} et à droite par C, on obtient

$$\begin{cases} A^2C^{-1}VC = A \\ C^{-1}WCA^2 = A \end{cases}$$

2)- $\Longrightarrow$. Supposons que $A^{\#}$ existe. Posons $D = CA^{\#}C^{-1}$ et montrons que

$$(CAC^{-1})^{\#} = D.$$

On a :

$$CAC^{-1}DCAC^{-1} = CAC^{-1}CA^{\#}C^{-1}CAC^{-1} = CAA^{\#}AC^{-1} = CAC^{-1}.$$

$$DCAC^{-1}D = CA^{\#}C^{-1}CAC^{-1}CA^{\#}C^{-1} = CA^{\#}AA^{\#}C^{-1} = CA^{\#}C^{-1} = D.$$

$CAC^{-1}D = CAC^{-1}CA^{\#}C^{-1} = CAA^{\#}C^{-1} = CA^{\#}AC^{-1} = CA^{\#}C^{-1}CAC^{-1} = DCAC^{-1}$.
Donc $D = CA^{\#}C^{-1}$.

$\Longleftarrow$ Si CAC^{-1} groupe-inversible, alors par l'application de la question (1), il existe $V, W \in B(H)$ vérifiant

$$\begin{cases} A^2C^{-1}VC = A \\ C^{-1}WCA^2 = A \end{cases}$$

On pose $S = C^{-1}VC$ et $T = C^{-1}WC$. Donc

$$\begin{cases} A^2S = A \\ TA^2 = A \end{cases}$$

On conclut que T Groupe-inversible.

□

Exercice 17. *Soient $A, B \in B(H)$ deux opérateurs groupe-inversibles tels que $R(A) = R(B)$.*

(1) *Montrer que $R(AB) = R(A) = R(BA)$, $N(AB) = N(B)$ et $N(BA) = N(A)$.*

2) *En déduire que AB et BA sont groupe-inversibles.*

(3) *Montrer que $(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}B^{\#}B$ et $(BA)^{\#} = A^{\#}B^{\#}A^{\#}A$.*

Exercice 18. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Suivant la somme directe orthogonale $H = R(A) \oplus N(A^*)$.*

(1) *Montrer que A est G-inversible si et seulement si A_1 est inversible. Dans ce cas* $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$.

(2) *Supposons que A est G-inversible, Montrer que :*

$$A \text{ normal} \Longleftrightarrow AA^*A^{\#} = A^*A^{\#}A.$$

Preuve. 2)- $\Longrightarrow$ si A normal, alors

$$AA^*A^{\#} = A^*AA^{\#} = A^*A^{\#}A.$$

$\Longleftarrow$ Supposons maintenant que $AA^*A^{\#} = A^*A^{\#}A$.
On a

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*).$$

Donc

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus N(A^*) \longrightarrow R(A) \oplus N(A^*),$$

et

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De $AA^*A^{\#} = A^*A^{\#}A$, on obtient

$$\begin{bmatrix} (A_1A_1^* + A_2A_2^*)A_1^{-1} & (A_1A_1^* + A_2A_2^*)A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & A_1^*A_1^{-1}A_2 \\ A_2 & A_2^*A_1^{-1}A_2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ (A_1A_1^* + A_2A_2^*)A_1^{-1} = A_1^* \end{cases}$$

Il s'ensuit

$$A_1A_1^*A_1^{-1} = A_1^* \Longrightarrow A_1A_1^* = A_1^*A_1.$$

On conclut que A_1 normal et donc A normal. □

Exercice 19. *Soit $A \in B(H)$ d'indice fini k. Montrer que ;*

(1) $(A^n)^D = (A^D)^n$, *pour $n \in \mathbb{N}$.*

(2) $(A^D)^D = (A^D)^{\#} = A^2A^D$.

Preuve. 1- Montrons que $(A^n)^D = (A^D)^n$, Pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$A^n(A^D)^n = (AA^D)^n = (A^DA)^n = (A^D)^nA^n$$
$$(A^D)^nA^n(A^D)^n = (A^DAA^D)^n = (A^D)^n$$
$$(A^{n)^{k+1}}(A^D)^n = (A^{k+1}A^D)^n = (A^k)^n = (A^n)^k$$

Donc $(A^n)^D = (A^D)^n$.

Soit $p \geq k$. Comme $ind(A) \leq k$. Donc

$$H = R(A^k) \oplus N(A^k) = R(A^p) \oplus N(A^p)$$

Alors $ind(A^p) \leq 1$. D'où $(A^p)^D = (A^p)^\# = (A^D)^p$.

2- Supposons que A admet un inverse de Drazin d'ordre k, alors

$$H = R(A^k) \oplus N(A^k) = R(A^D) \oplus N(A^D)$$

Alors $ind(A^D) \leq 1$ et donc $(A^D)^\#$. Par conséquent $(A^D)^D = (A^D)^\#$.
Montrons maintenant que $(A^D)^\# = A^2A^D$. On a

$$A^DA^2A^D = A^2A^DA^D.$$

$$A^DA^2A^DA^D = A^DAAA^DA^D = A^DAA^DAA^D = A^DAA^D = A^D.$$

$$A^2A^DA^DA^2A^D = A^2A^DAA^DAA^D = A^2A^DAA^D = A^2A^D.$$

Donc $(A^D)^D = (A^D)^\# = A^2A^D$. □

Exercice 20. *Soient $A, B \in B(H)$. Montrer que*

(1) *Montrer que si B est nilpotent, alors $I + B$ inversible.*

(2) *Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) *A^D existe*
   (b) *Il existe P idempotent tel que $AP = PA$, AP nilpotent et $A + P$ inversible.*

Preuve. 1- Supposons que B est un nilpotent d'ordre P i.e.$B^p = 0$. On a

$$(I + B)(I - B + B^2 - B^3 + ... + (-1)^{p-1}B^{p-1}) = I + (-1)^{p-1}B^P = I,$$

et

$$(I - B + B^2 - B^3 + ... + (-1)^{p-1}B^{p-1})(I + B) = I + (-1)^{p-1}B^P = I.$$

Donc $I + B$ inversible.

2- $\Longrightarrow$ Supposons que A est Drain-inversible d'ordre n. Alors AA^D est une projection sur $R(A^n)$ ce qui implique que $P = I - AA^D$ une projection sur $N(A^n)$. Donc on a :

$$AP = A(I - AA^D) = A - AAA^D = A - AA^DA = (I - AA^D)A = PA.$$

$$(AP)^n = A^kP^n = A^nP = A^n(I - AA^D) = A^n - A^{n+1}A^D = A^n - A^n = 0.$$

Donc AP nilpotent d'ordre n.

Puisque

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n),$$

où $A_1 \in B(R(A^n))$ inversible et A_4 nilpotent d'ordre n .

$$A^D = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^n) \oplus N(A^n) \longrightarrow R(A^n) \oplus N(A^n)$$

$$P = I - AA^D = \begin{bmatrix} I_{R(A^n)} & 0 \\ 0 & I_{N(A^n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R(A^n)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{N(A^n)} \end{bmatrix}$$

$$A+P=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4+I \end{bmatrix}$$

Puisque A_4 nilpotent d'ordre n, alors de la question (1), A_4+I inversible et comme A_1 inversible, donc $A+P$ inversible.

$\Longleftarrow$. Supposons qu'il existe P une projection, vérifiant $AP=PA$, AP nilpotent d'ordre k et $A+P$ inversible.

Comme $AP=PA$, alors $A(I-P)=(I-P)A$,
$A(A+P)=(A+P)A$ et $A(A+P)^{-1}=(A+P)^{-1}A$.

On pose $B=(A+P)^{-1}(I-P)$. Montrons que $B=A^D$. On a

$AB=A(A+P)^{-1}(I-P)=(A+P)^{-1}(I-P)A=BA$.

$BAB=(A+P)^{-1}(I-P)A(A+P)^{-1}(I-P)$

On a $(A+P)(I-P)=A+P-(A+P)P=A+P-P(A+P)=(I-P)(A+P)$.

Donc $(A+P)^{-1}(I-P)=(I-P)(A+P)^{-1}$.

Par conséquent $BAB=(A+P)^{-1}A(A+P)^{-1}(I-P)^2=(A+P)^{-1}A(A+P)^{-1}(I-P)$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} I-P &= (A+P)(A+P)^{-1}(I-P) \\ &= A(A+P)^{-1}(I-P)+P(A+P)^{-1}(I-P) \\ &= A(A+P)^{-1}(I-P)+(A+P)^{-1}P(I-P) \\ &= A(A+P)^{-1}(I-P) \end{aligned}$$

Donc $BAB=(A+P)^{-1}A(A+P)^{-1}(I-P)=B$

Comme $I-P=A(A+P)^{-1}(I-P)=AB$, donc

$$\begin{aligned} A^{k+1}B &= A^kAB \\ &= A^k(I-P) \\ &= A^k-A^kP \\ &= A^k-A^kP^k \\ &= A^k-(AP)^k \\ &= A^k \quad car (AP)^k=0 \end{aligned}$$

Donc A^D existe et $A^D=(A+P)^{-1}(I-P)=(I-P)(A+P)^{-1}$.

3- Montrons $(A^D)^D = A \Leftrightarrow ind(A) \leq 1$

$\Longrightarrow$ Supposons $(A^D)^D = A$. Puisque A^D est Drazin-inversible, par l'application de la question (2) sur l'opérateur A^D, il existe P une projection, vérifiant $A^D P = PA^D$, $A^D P$ nilpotent et $A^D + P$ inversible.

Dans ce cas $(A^D)^D = (A^D + P)^{-1}(I - P) = A$ et $P = I - A^D(A^D)^D = I - A^D A = I - AA^D$.

De $(A^D + P)^{-1}(I - P) = A$ on obtient $I - P = (A^D + P)A$

$AA^D = A^D A - PA$, ce qui implique $PA = 0$.
Donc $R(A) \subset N(P) = N(I - AA^D) = R(AA^D) = R(A^k)$ et comme $R(A^k) \subset R(A)$, alors $R(A) = R(A^k)$ et donc $d(A) \leq 1$. D'où $ind(A) \leq 1$.

$\Longleftarrow$ Si $ind(A) \leq 1$, alors $(A^D)^D = (A^{\#})^{\#} = A$. $\square$

Exercice 21. *Soit H un espace de Hilbert et $A, B \in B(H)$. Supposons que BA est groupe-inversible.*

(1) Montrer que AB est Drazin-inversible.

(2) Montrer que $A[(BA)^{\#}]^2 B$ est le Drazin-inverse de AB d'indice 2.

Exercice 22. *Soient $A, B \in B(H)$ deux opérateurs Drazin inversibles d'indices finis k. respectivement. Supposons que $AB = BA = 0$. Montrer que :*

(1) *Montrer que si A est Drazin-inversible, alors $A^D B = BA^D = 0$.*

(2) *Supposons que $A, B \in B(H)$ sont Drazin-inversibles d'indice fini $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(A + B)^D = A^D + B^D$.*

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

[1] S. N. Afriat, Orthogonal and oblique projectors and the characterisation of pairs of vector spaces, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957)800-816.

[2] J. K. Baksalary and O.M. Baksalary, Particular formulae for the Moore-Penrose inverse of a columnwise partitioned matrix, Linear Algebra Appl. 41 (2007), 16-23.

[3] O. M. Baksalary and G. Trenkler, Function of orthogonal projectors involving the Moore-Penrose inverse, Computer and Applications 59 (2010) 764-778.

[4] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Applications, second ed., Springer, 2003.

[5] J. Benítez and V. Rakočević, Matrices A suth that $AA^{+} - A^{+}A$ are nonsingular, Applied Mathematics and computation 217 (2010) 3493-3503.

[6] D. Buckholtz, Inverting the difference of Hilbert space projection, Amer. Math. Monthly 104 (1997) 60-61.

[7] D. Buckholtz, Hilbert space idempotents and involutions, Proc. Am. Math. Soc. 128 (2000) 1415-1418.

[8] S. R. Caradus, Generalised Inverse and operator Theory, Queen's Paper in Pure and Appl Math, vol. 50, Quenn's Univ., Kingston, ON,1978

[9] S. L. Compbell, CD, Meyer, Generalized inverses of linear transformations, Pitman Publishing limited, 1979, Reprinting, SIMA, 2010.

[10] G. Corach, R. Porta, and L. Recht, An operator inequality, Linear Algebra Appl. 142(1990), 153-158.

[11] C. Conde, M. S. Moslehian, and A. Seddik, Operator inequalities related to the Corach-Porta-Recht inequality, Linear Algebra Appl., 436(2012), 3008-3017.

[12] C. Y. Deng, H.K. Du, Common complements of two subspaces and an answer of GroB's question, Acta Math. Sinica 49 (2006) 1099-1112.

[13] C. Y. Deng, The drazin inverse of products and differences of orthogonal projections, J. Math. Appl. 335, (2007), 64-71.

[14] C. Y. Deng and H. K. Du, Representations of the Moore-Penrose inverse of 2 by 2 Block operator valued partial matrices, Linear and multilinear Algebra 58 (2010), 15-26.

[15] R. G. Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 413-415.

[16] D. S. Djordjević, Characterizations of normal, hyponormal and EP operators, J. Math. Appl. 329 (2007) 1181-1190.

[17] D. S. Djordjević and J.j. Koliha, Characterizing Hermitian, normal and EP operators, Filomat 21 (1) (2007) 39-54.

[18] P. A. Fillmore, J.P. Williams. On operator ranges, Adv. Math. 7, 254-281.

[19] J. I. Fujii, M.Fujii, T.Furuta and R. Nakamoto, Norm inequalities equivalent to Heinz inequality, Pros, mer, Math, Soc 118 (1993), 827-830.

[20] T. Furuta and R. Nakamoto, some theorems on certain contraction operators, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 565-567.

[21] S. Guedjiba and R. Benacer, Inversion généralisée d'opérateurs linéaires, Math Magrheb, Rev. vol. 11 (2000).

[22] R. Hart and M. Mbekhta, on generalized inverse in C^* -algebra, Studia mathematica, 103 (1992) , 71-77.

[23] E. Heinz, Beitrage zur storungstheory der spctralzerlegung, Math. Ann 123 (1951) 415-438.

[24] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc, 54 (1948), 575-580.

[25] M. Khosravi, Corach-Porta-Recht inequality for closed range operators, Mathematical Inequalities and Applications, Volum 16, Number 2 (2012), 477-481.

[26] J. J. Koliha and V. Rakočević, Invertibility of difference of idempotents, Linear Multilinear Algebra 51 (2003) 97-110.

[27] J. J. Koliha and V. Rakočević, Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space, Integr. Equ. Oper. Theory 52 (2005) 125-134.

[28] J.J. Koliha, V. Rakočević and I. Straškraba, The difference and sum of projectors, Linear Algebra Appl. 388 (2004), 279-288.

[29] A. McIntosh, Heinz inequalities and perturbation of spectral families, Macquarie Mathematical Reports, Macquarie Univ., 1979.

[30] S. Menkad and A. Seddik, Operator inequalities and normal opérators, Banach J. Math. Anal. 6 (2012), no. 2, 204-210.

[31] S. Menkad and S.Guedjiba, on the invertibility of $AA^+ - A^+A$ in a Hilbert space, Math. Vesnik.

[32] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix , Bull. Amer. Math. Soc, 26 (1920), 394-395.

[33] M. Z. Nashed, Generalized inverses, Theory and Application, Academic Press, NY, (1976).

[34] R. Penrose, Ageneralized inverse for matrices, Procedings of the Combridge Philosophical, Society, 51 (1955), 406-413.

[35] Y. Tian and Y.Takane, The inverse of any two- by- two nonsingular partitioned matrix and tree matrix inverse completion problems, Computer Mathematics with applications, 57 (2009), no 8, 1294-1309.

[36] A. Taylor and D. Lay, introduction to functional analysis, 2nded ; John Wiley , sons, 1980.

[37] I. Vidav, On idempotent operators in Hilbert a space, Publ. Ins. Math.(Beograd), 4 (1964) 157-136.

[38] J. Von Neumann, On regular rings, Proc. Natl. Acad. Sci USA 1936, 22 (12), 707-713.