Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \M1, AFTOL \2023-2024

Série de TD 1.
Initiation à la théorie des opérateurs

Exercice 1. *Soient* $p \in [1, \infty[$ *et* $M_\lambda : l^p(\mathbb{C}) \to l^p(\mathbb{C}$ *un opérateur défini par*

$$M_\lambda x = \lambda \circ x,$$

où $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}$, $C = \sup\limits_n |\lambda_n|$ *et* $K = \inf\limits_n |\lambda_n|$

(1) *Montrer que* M_λ *linéaire borné.*

(2) *Trouver la norme* M_λ.

(3) *On suppose que* $\lambda_n \neq 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que :*

  (a) M_λ *est injectif.*

  (b) $\overline{R(M_\lambda)} = l^p(\mathbb{C}$.

(4) *On suppose que* $K = 0$. *Montrer que* M_λ *n'est pas inversible.*

(5) *Montrer que si* $K > 0$, *alors* M_λ *est inversible, et trouver son inverse.*

(6) *On suppose que l'un des* λ_n *est nul. Montrer que* M_λ *n'est pas injective et* $\overline{R(M_\lambda)} \neq l^p(\mathbb{C})$.

(7) *Trouver* $\sigma_p(M_\lambda)$.

(8) *On suppose que* $\lambda_n \to 0$. *Montrer que* M_λ *n'est pas inversible.*

(9) *On suppose que* $\lambda_n \to 0$ *et* $\lambda_n \neq 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $R(M_\lambda)$ *n'est pas fermé.*

(10) *Montrer que* $\sigma(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}^*\}}$.

(11) *En déduire* $\sigma(M_\lambda)$, *si* $\lambda_n \to \lambda$.

Exercice 2. *Soient* $E = C^1([0,1], \mathbb{C})$ *et* $F = C([0,1]), \mathbb{C}$, *tous deux munis de la norme* $\|.\|_\infty$. *Soit l'opérateur* $T : E \to F$, *défini par* $Tf = f^{'}$.

(a) *Montrer que* T *est linéaire non borné.*

(b) *Montrer que* $G(T)$ *le graphe de* T *est fermé.*

(c) *En déduire que* $(E, \|.\|_\infty)$ *n'est pas un espace de Banach.*

Exercice 3. *Soient* $p \in [1, \infty[$ *et* $g \in C([a,b])$. *On considère l'opérateur de multiplication* $M_g ; L^p([a,b]) \longrightarrow L^p([a,b])$, *défini par* $M_g f = gf$.

(a) *Montrer que* $M_g \in B(L^p[a,b])$.

(b) *On suppose que* $g(t) \neq 0$, *pour tout* $t \in [a,b]$. *Montrer que* M_g *inversible et trouver son inverse.*

(c) *On suppose qu'il existe* $t_0 \in [a,b]$ *tel que* $g(t_0) = 0$. *Montrer que* M_g *n'est pas surjectif.*