Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \L3 Maths \2023-2024

Série de TD 3.
Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires

Exercice 1. *Soient H un espace de Hilbert et $T, S \in B(H)$.*

(1) *Montrer l'identité suivante :*

$$\forall x, y \in H,\ \langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\Big].$$

(1) *Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) $T = S$.

(b) $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$, *pour tout* $x \in H$.

(c) *En déduire que T est auto-adjoint si et seulement si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in H$.*

Exercice 2. (a) *Soit l'opérateur de décalage à gauche défini par :*
$S_l : (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2),\ S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.
Calculer l'opérateur adjoint S_l^*.

(b) *Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel et soit A l'opérateur intégrale de noyau K défini par $A : H \to H,\ Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$, pour tout $t \in [0,1]$, où K une fonction continue complexe sur $[0,1] \times [0,1]$.*
Calculer l'opérateur adjoint A^*.

Exercice 3. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que*

(1) $\|A\| = \|A^*\|$

(2) AA^* *et* A^*A *sont auto-adjoints*

(3) $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$

(4) *A inversible si et seulement A^* inversible*

(5) $N(A^*) = R(A)^\perp$

(6) *Si A est normal, alors $N(A) = N(A^*)$.*

Exercice 4. *Soit $E = (L^2[0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_2$. On considère l'opérateur de multiplication $A; E \longrightarrow E$ défini par*

$$Af(x) = xf(x),\ \textit{pour } x \in [0,1]$$

(1) *Montrer que A est bien défini, linéaire et borné.*

(2) *Trouver A^**

(3) *Déterminer $\sigma(A)$*

(4) *Montrer que $\sigma_p(A) = \phi$*

Exercice 5. *Considérons l'opérateur de décalage à droite défini par*
$S_r : (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2),\ S_r(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$.

(1) *Vérifier que l'opérateur S_r injectif mais il n'est pas surjectif.*

(2) *Trouver* S_r^*.

(3) *Montrer que* S_r *est isométrique mais il n'est pas normal.*

(4) *Montrer que* 0 *n'est une valeur propre de* S_r *, mais* $0 \in \sigma(S_r)$.

() *Montrer que* $\sigma_p(S_r) = \phi$.

Exercice 6. *Soit* $A : (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2) \to (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ *un opérateur défini par*

$$A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_2, \lambda_2 x_3, ...),$$

où $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}^*$ *.Trouver* $\sigma_p(A)$.