Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2, AFTOL \2021-2022

Série de TD 1.
Théorie des inverses généralisés

Dans toute la suite V, W deux espaces normés sur le même corps K ;
et H un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soient $A : V \longrightarrow W$, $B : W \longrightarrow V$ Deux applications linéaires. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *B est un inverse intérieur de A,*
(2) $(AB)^2 = AB$ *et* $R(AB) = R(A)$,
(3) $(BA)^2 = BA$ *et* $N(BA) = N(A)$,
(4) $(BA)^2 = BA$ *et* $R(A) \cap N(B) = \{0\}$.

Exercice 2. *Soient $A : V \longrightarrow W$, $B : W \longrightarrow V$ Deux applications linéaires. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *B est un inverse extérieur de A,*
(2) $(BA)^2 = BA$ *et* $R(BA) = R(B)$,
(3) $(AB)^2 = AB$ *et* $N(AB) = N(B)$,
(4) $(AB)^2 = AB$ *et* $R(B) \cap N(A) = \{0\}$.

Exercice 3. *Soient U un espace vectoriel et $T_1 : V \to W$, $T_2 : U \to V$, deux applications linéaires.*

(1) *Supposons que G_1 et G_2 sont deux inverses extérieurs de T_1 et T_2, respectivement. Montrer que :*

$$G_2G_1 \text{ est un inverse extérieur de } T_1T_2 \Leftrightarrow T_2G_2G_1T_1 \text{ est une projection.}$$

(2) *Supposons que S_1 et S_2 sont deux inverses intérieurs de T_1 et T_2, respectivement. Montrer que :*

$$S_2S_1 \text{ est un inverse intérieur de } T_1T_2 \Leftrightarrow S_1T_1T_2S_2 \text{ est une projection.}$$

Exercice 4. *Soit $Q \in B(H)$ un idempotent . Montrer que $Q^+ = P_{N(Q)^\perp}P_{R(Q)}$.*
(P_M une projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé M de H).

Exercice 5. *Soient $A, B \in B(H)$ à images fermées. Supposons que $AB^* = A^*B = 0$. Montrer que :*

(1) $A^+B = BA^+ = AB^+ = B^+A = 0$.
(2) $(A + B)^+ = A^+ + B^+$.

Exercice 6. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *A est auto-adjoint,*
(2) $AAA^+ = A^*$,
(3) $AA^*A^+ = A$.

Exercice 7. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Supposons que A est EP. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(A^n)$ fermé et que $(A^n)^+ = (A^+)^n$.*