Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \L3 Maths \2022-2023

Série de TD 1.
Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires

Exercice 1. *Soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur l'espace vectoriel* E. *Montrer que* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes si et seulement si les deux opérateurs d'identité* $Id_1 : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ *et* $Id_2 : (E, \|.\|_2) \to (E, \|.\|_1)$ *sont bornés.*

Exercice 2. *Soient* E *un espace vectoriel normé et* $A : E \to E$ *un opérateur linéaire. Montrer que* A *est borné si et seulement si* $\{x \in E; \|Ax\| = 1\}$ *est fermé.*

Exercice 3. *1- Montrer que les opérateurs suivants sont linéaires bornés, continus et Lipschitziens puis déterminer leurs normes (si c'est possible) :*

(a) *Opérateur de décalage à gauche défini par* $A : (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2),\ A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

(b) $A : ((C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to ((C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty),\ Af(x) = f(x) - f(0), x \in [0,1]$.

(c) $A : ((C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to \mathbb{R},\ Af = \int_0^1 f(t)dt$. *(Utiliser* $f_n(t) = \dfrac{nsint}{n|sint| + 1}$, $t \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*).*

(d) *Opérateur intégrale de noyau* K *défini par* $A : (L^2[0,1], \|.\|_2) \to (L^2[0,1], \|.\|_2)),\ Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$, *où* K *est une fonction continue sur* $[0,1] \times [0,1]$.

2- Considérons l'opérateur $A : (R(X), \|.\|) \to \mathbb{R},\ A(P) = P(2)$. *Montrer que* A *est linéaire non borné. Est il continu ?(Justifier). Est il lipschitzien ? (Justifier).*

Exercice 4. *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. *On considère l'opérateur* A *défini sur* E *par*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) *Montrer que* A *est bien défini, linéaire et borné.*

(2) *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *Soit* $f_n = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. *Calculer* $\|f_n\|_1$ *et* $\|Af_n\|_1$.

(3) *Déterminer* $\|A\|$.

Exercice 5. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. Soient*$(e_n)_n$ *et* $(f_n)_n$ *deux suites orthonormales de* H *et* $(\lambda_n)_n$ *une suite bornée de nombres complexes. On pose* $M = \sup_n |\lambda_n|$. *Considérons l'opérateur* $A : H \to H$ *défini par* $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, f_n \rangle e_n$. *Montrer que* A *est bien défini, linéaire, borné et que* $\|A\| = M$.

Indication. *Théorème Riesz-Fisher : Si* $(v_n)_n$ *une suite orthonormale de* H, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$ *converge dans* H *si et seulement si* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *converge dans* $\mathbb{R}$.

Inégalité de Bessel : Pour tout $x \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice 6. *Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés* $(A_n)_n$ *défini sur* $(l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ *par*

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, ...).$$

(1) *Montrer que pour tout* n, A_n *est bien défini, linéaire et borné, puis calculer sa norme.*

(2) *Montrer que la suite* $(A_n)_n$ *converge uniformément vers l'opérateur nul.*

(3) *Utiliser deux méthodes différentes pour montrer que* $(A_n)_n$ *converge fortement vers l'opérateur nul.*