Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2, AFTOL \2024-2025

Série de TD 2.
Théorie des inverses généralisés

Dans tout ce qui suit H un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soit $A \in B(H)$.*
1)- Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *A une isométrie partielle ;*

(b) *$R(A)$ fermé et $A^+ = A^*$.*

Exercice 2. *Soient $A \in B(H)$ un EP-opérateur et $P \in B(H)$ une projection orthogonale sur $R(A)$.*

(1) *Montrer que AP est Moore-Penrose inversible.*

(2) *Montrer que AP est EP.*

Exercice 3. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée et soit $A = UP$ la décomposition polaire canonique de A. Alors on a*

(1) $A^+ = P^+U^*$ *et* $P^+ = A^+U$

(2) $PP^+ = P^+P = A^+UP = A^+A$,

Exercice 4. *Soit $A \in B(H)$ auto-adjoint à image fermée.*

(1) *Montrer que l'opérateur $I - A^+A + A$ est inversible.*

(2) *Vérifier que $(I - A^+A + A)^{-1} = I - A^+A + A^+$.*

(3) *Montrer que l'opérateur $I - AA^+ + AA^*$ est inversible et trouver son inverse.*

Exercice 5. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est normal,*

(2) $AA^*A^+ = A^*$ *et* $a(A) < +\infty$,

(3) $A^+A^*A = A^*$ *et* $d(A) < +\infty$.

Exercice 6. *Soit $A \in B(H)$. Supposons que A est groupe inversible. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *A est un EP-opérateur.*

(2) $R(A) \subset R(A^*)$.

(3) $R(A^*) \subset R(A)$.

(4) $N(A) \subset N(A^*)$.

(5) $N(A^*) \subset N(A)$.

Exercice 7. *Soient $A \in B(H)$ à image fermée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *A est un EP opérateur,*

(2) $asc(A) < \infty$ *et* $A(A^+)^2 = A^+$,

(3) $dsc(A^+) < \infty$ *et* $A^2A^+ = A$,

(4) $asc(A) < \infty$ *et* $A^2A^+ = A$,

(5) $dscA < \infty$ *et* $A^+A^2 = A$.

Exercice 8. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $A, C \in B(H)$. *Supposons que* C *est un opérateur inversible.*

(1) Supposons que CAC^{-1} *est groupe-inversible. Montrer l'existence de deux opérateurs* $V, W \in B(H)$, *tels que*

$$A^2C^{-1}VC = A \text{ et } C^{-1}WCA^2 = A.$$

(2) Montrer que $A^{\#}$ *existe si et seulement si* CAC^{-1} *est groupe-inversible.*

Exercice 9. *Soit* $A \in B(H)$ *à image fermée. Alors* $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *Suivant la somme directe orthogonale* $H = R(A) \oplus N(A^*)$. *Montrer que*

(1) A_1 *est inversible si et seulement si* A *est Groupe inversible et dans ce cas* $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_2A_1^{-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$.

(2) A *normal* $\Leftrightarrow A^{\#}$ *existe et* $AA^*A^{\#} = A^*A^{\#}A$