Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2 \AFTOL \2021-2022

Série 3.
Théorie des inverses généralisés

Dans Toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Exercice 1. *Soit $A \in B(H)$. Supposons que A est groupe-inversible. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *A est un EP-opérateur.*

(2) $R(A) \subset R(A^*)$.

(3) $R(A^*) \subset R(A)$.

(4) $N(A) \subset N(A^*)$.

(5) $N(A^*) \subset N(A)$.

Exercice 2. *Soit H un espace de Hilbert et $A, C \in B(H)$. Supposons que C est un opérateur inversible.*

(1) Supposons que CAC^{-1} est groupe-inversible. Montrer l'existence de deux opérateurs $V, W \in B(H)$, tels que

$$A^2C^{-1}VC = A \text{ et } C^{-1}WCA^2 = A.$$

(2) Montrer que $A^{\#}$ existe si et seulement si CAC^{-1} est groupe-inversible.

Exercice 3. *Soient $A, B \in B(H)$ deux opérateurs groupe-inversibles tels que $R(A) = R(B)$.*

(1) *Montrer que $R(AB) = R(A) = R(BA)$, $N(AB) = N(B)$ et $N(BA) = N(A)$.*

2) *En déduire que AB et BA sont groupe-inversibles.*

(3) *Montrer que $(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}B^{\#}B$ et $(BA)^{\#} = A^{\#}B^{\#}A^{\#}A$.*

Exercice 4. *Soit $A \in B(H)$ à image fermée. Alors $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Suivant la somme directe orthogonale $H = R(A) \oplus N(A^*)$.*

(1) *Montrer que A est G-inversible si et seulement si A_1 est inversible.*
Dans ce cas
$A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B(R(A) \oplus N(A^*))$.

(2) *Supposons que A est G-inversible, Montrer que :*

$$A \text{ normal} \iff AA^*A^{\#} = A^*A^{\#}A.$$

Exercice 5. *Soit $A \in B(H)$ d'indice fini k. Montrer que ;*

(1) $(A^n)^D = (A^D)^n$, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

(2) $(A^D)^D = (A^D)^{\#} = A^2A^D$.

Exercice 6. *Soient $A, B \in B(H)$. Montrer que*

(1) *Montrer que si B est nilpotent, alors $I + B$ inversible.*

(2) *Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

  (a) A^D *existe*

  (b) *Il existe P idempotent tq $AP = PA$, AP nilpotent et $A + P$ inversible.*

(3) Montrer que $(A^D)^D = A \Leftrightarrow ind(A) \leq 1$