Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Année 2019-2020.

Solution des exercices (3) et (4), série de TD 2
Algèbre 4

Solution de l'exercice 3 **1.** *) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est liée. En effet pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tq $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$, on obtient :*

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 + 9\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ 5\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_4 \\ \alpha_2 = \alpha_4 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases}$$

Pour $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$ et $\alpha_4 = 1$, on obtient une solution non-nulle du système. Autrement dit, $-2v_1 + v_2 - v_3 + v_4 = 0$, et donc la famille est liée.
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une famille génératrice de F mais ce n'est pas une base de F car elle n'est pas libre. Puisque $v_2 = 2v_1 + v_3 - v_4$ est combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_4, alors la famille $\{v_1, v_2 v_4\}$ engendre aussi F et comme elle est libre alors c'est une base de F.
2) $dim(F) = 3$.
En utilisant le théorème de la base incomplète, on va trouver deux vecteurs u_2 et u_5 de sorte que $\{v_1, u_2, v_3, v_4, u_5\}$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.
Alors, $H = \{u_2, u_5\}$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^5$.

D'après le théorème de la base incomplète, on sait qu'on peut choisir les vecteurs u_2 et u_5 parmi les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On vérifie facilement ici que $u_2 = e_2$ et $u_5 = e_4$ convient car ($\{v_1, e_2, v_3, v_4, e_4\}$ est libre).

Solution de l'exercice 4 **1.** *) F est un hyperplan car il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y, z, t) = x + y - z - t$ (facile à vérifier) tq $Ker(\varphi) = F$.*
2) $dim(F) = dim(\mathbb{R}^4) - 1 = 4 - 1 = 3$.
3) Les equations de F sont de la forme $\lambda(x + y - z - t) = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
4) Il est facile de vérifier que F est engendré par les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0) \; v_2 = (1, 0, 1, 0) \text{ et } v_3 = (1, 0, 0, 1)$$

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de F car est une famille libre.
5) Comme F est un hyperplan, alors son supplémentaire est une droite $D = kv$ où $k \in \mathbb{R}$ et $v \notin F$.