Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Année 2019-2020.

Correction de la série de TD 1
Algèbre 4

Exercice 1. (1) *Soit F_1 le sous-espace engendré par u_1. Alors on a :*

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ v = \alpha u_1.$

Cette relation est équivalent à

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases}$$

2) *Soit F_2 le sous-espace engendré par u_1 et u_2. Alors on a :*

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_2 \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ v = \alpha u_1 + \beta u_2.$

Par conséquent

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = 2\alpha \\ z = 3\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

(3) *de même on trouve :*

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_3 \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha + 2\beta + \gamma \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = x \\ -3\beta - 2\gamma = y - 2x \\ \gamma = z \end{cases}$$

Ce système triangulaire admet toujours une solution, quelques soient les valeurs x, y, z. Donc $F_3 = \mathbb{R}^3$

Exercice 2. (1) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow x = -2y + z$. *Donc $E = Vec(u_1, u_2)$, où $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette solution n'est pas uniques.*

(2) *On a*

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \\ z = z \end{cases}$$

Donc F est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3. (2) $Ker(u) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / u(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.
$(x,y,z) \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x,y,z) = (0,0)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

Donc $Ker(u) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, y = -z\}$. *Par conséquent* $Ker(u)$ *est le sous-espace engendré par le vecteur* $(0,-1,1)$.
Déterminons maintenant l'image de u.Posons $t = y + z$, *alors on trouve :*
$u(x,y,z) = (x+t, -x+2t) = x(1,1) + t(1,-1)$,
et comme $(1,1)$ *et* $(1,-1)$ *sont linéairement indépendants, alors* $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

(3) $dim(Ker(u)) = 1$ *et* $dim(Im(u)) = 2$.

Exercice 4. (2) $(x,y,z) \in Ker(u) \Leftrightarrow (x-y, -3x+3y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Donc $Ker(u) = \{(0,0)\}$.
Trouvons maintenant l'image de u. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
$u(x,y) = (x-y)(1,-3)$, *alors* $Im(u) = [\{(1,-3)\}]$.

(3) *Comme* $Ker(u) = \{(0,0)\}$, *l'application u est injective, par contre elle n'est pas surjective car* $Im(u) \neq \mathbb{R}^2$*(* $dim(Im(u)) = 1 < 2.$*)*

Exercice 5. (1) $f(e_1) = (1,2,0), f(e_2) = (0,1,-1), f(e_3) = (-1,-3,2)$.

(2) $f_1 = e_1 + 2e_2 + 0e_3$, $f_2 = 0e_1 + e_2 - e_3$, $f_3 = -e_1 - 3e_2 + 2e_3$.

(2) $Ker(f) = \{0\}$ *et* $Im(f) = Vec(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}^3$, *car* f_1, f_2, f_3 *une famille libre.*

Exercice 6. (1)

$$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4y-4z=0 \\ 5x-3y-4z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=2z \\ z=z \end{cases}$$

Donc $Ker(f) = vec(a)$, *où* $a = (2,2,1)$.

(1) $f(a) = (0,0,0)$, $f(b) = (2,2,0)$, $f(c) = (0,1,-1) = c$.

(2) *Montrons maintenant que* $Im(f) = Vec(b,c)$.
On a $f(b) = (2,2,0) = 2(1,1,0) = 2b$, *ceci implique que* $b = \frac{1}{2}f(b) = f(\frac{1}{2}b)$, *car f linéaire. Donc* $b \in Im(f)$. *Comme* $f(c) = c$, *alors* $c \in Im(f)$, *et puisque* $Im(f)$ *un sous-espace vectoriel, alors on obtient* $Vec(b,c) \subset Im(f)$.
Réciproquement. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *on trouve :*
$f(x,y,z) = (6x-4y-4z)b + (-x+y)c$. *Donc* $Im(f) \subset Vec(b,c)$. *On conclut que* $Im(f) = Vec(b,c)$.

(3) *Oui. En effet :*

$$Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} Ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^3 \\ et \\ Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \end{cases}$$

On a $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ *car* $a \notin Im(f)$.
D'autre part pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *:*
$(x, y, z) = (-x + y + z)a + (3x - 2y - 2z)b + (-x + y)c$.
Par conséquent $Ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^3$.