Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \L3 Maths \2023-2024

Série de TD 1.
Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires

Exercice 1. *Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur l'espace vectoriel E. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si les deux opérateurs d'identité $Id_1 : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ et $Id_2 : (E, \|.\|_2) \to (E, \|.\|_1)$ sont bornés.*

Exercice 2. *Soient E un espace vectoriel normé et $A : E \to E$ un opérateur linéaire. Montrer que A est borné si et seulement si $\{x \in E; \|Ax\| = 1\}$ est fermé.*

Exercice 3. *Soient E et F deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$ et $A : E \to F$ un opérateur linéaire.*
1- Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *A borné,*

(b) *Il existe une suite bornée $(x_n)_n$ dans E telle que $lim\|Ax_n\| = \infty$.*

2- Considérons l'opérateur $A : (R(X), \|.\|) \to \mathbb{R},\ A(P) = P(2)$. Montrer que A est linéaire non borné. A est il continu ?(Justifier). Est il lipschitzien ? (Justifier).

Exercice 4. *1- Montrer que les deux opérateurs suivants sont bien définis, linéaires, bornés, continus et Lipschitziens puis déterminer leurs normes (si c'est possible) :*

(a) *Opérateur de décalage à gauche défini par $A : (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2),\ A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.*

(b) *Opérateur intégrale de noyau K défini par $A : (L^2[0, 1], \|.\|_2) \to (L^2[0, 1], \|.\|_2)),\ Af(t) = \int_0^1 K(t, s)f(s)ds$, où K est une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$.*

Exercice 5. *Soit $\varphi \in C[0,\ 1]$. On considère l'opérateur suivant :*

$$\begin{aligned} T :\quad (C[0,\ 1], \|.\|_\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow Tf = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt. \end{aligned}$$

1) Montrer que T linéaire, borné et que $\|T\| \leq \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$.

2) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $C[0,\ 1]$, définie par :

$$\forall t \in [0,\ 1],\ \forall n \geq 1,\ f_n(t) = \frac{n^2\varphi(t)}{n^2|\varphi(t)| + 1}.$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $Tf_n \geq 0$ et $\|f_n\|_\infty \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \left|Tf_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

c) En déduire que $\lim_n Tf_n = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $Tf_n \leq \|T\|$.

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt \leq \|T\|$.

3) Déterminer $\|T\|$.

Exercice 6. *Soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. *On considère l'opérateur* A *défini sur* E *par*

$$Af(x) = \textstyle\int_0^x f(t)dt.$$

(1) *Montrer que* A *est bien défini, linéaire et borné.*

(2) *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *Soit* $f_n = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. *Calculer* $\|f_n\|_1$ *et* $\|Af_n\|_1$.

(3) *Déterminer* $\|A\|$.

Exercice 7. $T : ((C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to ((C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $Tf(x) = f(x) - f(0), x \in [0,1]$.

1) Montrer que T *est bien défini, linéaire.*

2) On suppose que $C[0,\,1]$ *est muni de la norme* $\|.\|_\infty$. *Montrer que* T *est borné et trouver dans ce cas* $\|T\|$.

3) On suppose que $C[0,\,1]$ *est muni de la norme* $\|.\|_1$.

i) Montrer que T *n'est pas borné .*

(Utiliser la suite de fonctions $f_n(t) = (n+1)(1-t)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *et* $t \in [0,1]$*).*

ii) T *est il continu ?(Justifier). Est il lipschitzien ? (Justifier).*

4) En déduire que :

i) $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

ii) L'espace $C[0,\,1]$ *est de dimension infinie.*

Exercice 8. *Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés* $(A_n)_n$ *défini sur* $(l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ *par*

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \tfrac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, ...).$$

(1) *Montrer que pour tout* n, A_n *est bien défini, linéaire et borné, puis calculer sa norme.*

(2) *Montrer que la suite* $(A_n)_n$ *converge uniformément vers l'opérateur nul.*

(3) *Utiliser deux méthodes différentes pour montrer que* $(A_n)_n$ *converge fortement vers l'opérateur nul.*