Analyse Fractionnaire
(Cours et exercices avec solutions)

2ème Année Master EDP & Applications

Abdelaziz Mennouni

31 décembre 2020

Chapitre 1

Fonctions Spéciales

Chapitre 2

Transformée de Laplace

2.1 Transformée intégrale

Définition 2.1. *Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ deux espaces fonctionnels. Une transformation intégrale est un opérateur linéaire $T : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ défini par :*

$$T(x) : s \in \mathbb{R} \mapsto T(x)(s) = \int_{\mathbb{R}} k(s,t)x(t)dt.$$

$k(.,.)$ est une fonction caractérise T, dite noyau de la transformation.

Exemples 2.1.

1. *Pour $k(s,t) = e^{-st}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{C}$, la transformation est de Laplace.*
2. *Pour $k(s,t) = e^{-2i\pi st}, (s,t \in \mathbb{R})$, la transformation est de Fourier.*

Définition 2.2. *Une fonction x est dite d'ordre exponentielle $\alpha > 0$ ssi,*

$$\exists C > 0,\ \exists T > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t > T,\ |x(t)| < Ce^{\alpha t}.$$

Alors, la transformation de Laplace d'une fonction $x \in \mathscr{X}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x(.))(s) &:= \int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt, \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st}x(t)\,dt.\end{aligned}$$

Exemples 2.2. *Considérons la fonctions constante* $x(s) = 1$ *pour* $s \geq 0$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(x(.))(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\tau\right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{-s\tau}}{-s}+\frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.1. *Soit* $\rho > 0$. *Considérons la fonction* $x(s) = s^\rho$.

1. *Démontrer que*

$$\mathscr{L}\{x(.)\}(s) = \frac{\Gamma(\rho+1)}{s^{(\rho+1)}}, \quad (s > 0).$$

2. *En déduire la transformation de Laplace de la fonction* f *:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Exercice 2.2. *Calculer la transformation de Laplace de la fonction* x *dans les cas suivants :*

1.
$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

2. $x(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $x(t) = e^{-kt}$;
4. $x(t) = erf(\frac{a}{2\sqrt{t}})$.

Exercice 2.3. *Démontrer que la transformée de Laplace est une application linéaire.*

Exercice 2.4. *Calculer la transformée de Laplace d' un polynôme de degré n.*

Exercice 2.5. *Calculer la transformée de Laplace de la fonction x dans les cas suivants :*

$$x(t) = \cosh(at+b),$$

$$x(t) = \sinh(at+b).$$

Théorème 2.1. *Supposons que $\psi(s) = \mathscr{L}(x(t))(s)$ pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, alors*

$$\psi(s-\rho) = \mathscr{L}(e^{\rho t}x(t)) \qquad \rho \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Re}\,(s) > \rho.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\psi(s-\rho) &= \int_0^\infty e^{-(s-\rho)t}x(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}e^{\rho t}x(t)\,dt \\ &= \mathscr{L}(e^{\rho t}x(t)).\end{aligned}$$

■

Exemples 2.3. *1. Nous avons*

$$\mathscr{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2} \qquad (\mathrm{Re}\,(s) > 0),$$

alors

$$\mathscr{L}(te^{at})(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \qquad (\mathrm{Re}\,(s) > a),$$

de plus :

$$\mathscr{L}(t^n e^{at})(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (\mathrm{Re}\,(s) > a),$$

2. *Soit*

$$x(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x(t))(s) &= \mathscr{L}((t-1)^2)(s) \\ &= e^{-s}\mathscr{L}(t^2) \\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3}, \qquad (\mathrm{Re}\,(s) > 0). \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *Soit x une fonction continue par morceaux sur $[0,\infty[$ d'ordre exponentiel ρ. Alors*

$$\frac{d^n}{ds^n}(x(.))(s) = \mathscr{L}((-1)^n t^n x(t))(s), \qquad n = 1,2,3,\ldots (s > \rho). \tag{2.1}$$

Preuve. Pout tout $s > \rho$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(x(.))(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}x(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st}x(t)\,dt \\ &= \mathscr{L}(-tx(t))(s). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3. *(**Transformée de Laplace d'une dérivée**) Soit x une fonction continue sur $]0,+\infty[$. Supposons que $|x(t)| \leq Ce^{\rho t}$ sur $]0,+\infty[$, et si x' est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, alors la transformée de Laplace de la dérivée existe, de plus*

$$\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{x(t)\}(s) - x(0).$$

Démonstration. Supposons que x' est continue sur $]0,+\infty[$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}x'(t)dt \\ &= \left[e^{-st}x(t)\right]_{t=0}^{t=+\infty} + s\mathscr{L}\{x(t)\}(s)\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}|x(t)| \leq Ce^{\rho t} \quad &\text{et} \quad s>\rho, \\ e^{\rho t}x(t) \to 0, \quad &t \to +\infty,\end{aligned}$$

alors

$$\left[e^{-st}x(t)\right]_{t=0}^{+\infty} = 0 - e^0x(0) = -x(0).$$

□

Exercice 2.6. *Supposons que toutes les dérivées successives d'une fonction x sont continues sur $]0,+\infty[$, de plus $|x^{(i)}(t)| \leq Ce^{\rho t}$ pour $s>\rho$, et que $s^{(n)}$ soit continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.*

Calculer $\mathscr{L}\{x''(t)\}(s)$, $\mathscr{L}\{x'''(t)\}(s)$ et $\mathscr{L}\{x^{(n)}(t)\}(s)$, pour tout entier $n \geq 1$.

Exemple 2.1. *Calculons $\mathscr{L}(\sin^2\lambda t)$ et $\mathscr{L}(\cos^2\lambda t)$.*

Soit $x(t) = \sin^2\lambda t$, alors

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2\lambda\sin\lambda t\cos\lambda t = \lambda\sin 2\lambda t \\ \mathscr{L}(\lambda\sin 2\lambda t) &= s\mathscr{L}(\sin^2\lambda t) - \sin^2 0, \\ \mathscr{L}(\sin^2\lambda t) &= \frac{1}{s}\mathscr{L}(\lambda\sin 2\lambda t) \\ &= \frac{2\lambda^2}{s(s^2+4\lambda^2)}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cos^2\lambda t) &= \frac{1}{s}\mathscr{L}(-\lambda\sin 2\lambda t) + \frac{1}{s} \\ &= -\frac{2\lambda^2}{s(s^2+4\lambda^2)} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2+2\lambda^2}{s(s^2+4\lambda^2)}.\end{aligned}$$

Exercice 2.7. *Calculer la transformée de Laplace du polynôme de Laguerre*

$$P_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Exercice 2.8. *Calculer la transformée de Laplace de la fonction*

$$\varphi(t) = t^2 + t + 2 + e^{2t} + \cos(kt)).$$

Exercice 2.9. *En utilisant la transformation de Laplace de la fonction*

$$x_1(t) = \cos(kt),$$

calculer la transformation de Laplace de la fonction

$$x_2(t) = \sin(kt).$$

2.2 Solution des exercices

Solution 2.1. *1. Nous avons*

$$\mathcal{L}\{t^a\}(s) = \int_0^\infty t^a e^{-st}\,dt.$$

Posons $u = ts$, $du = sdt$, trouvons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^\rho\}(s) &= \int_0^\infty (\frac{u}{s})^\rho e^{-u}\frac{du}{s} \\
&= \frac{1}{s^{(\rho+1)}}\int_0^\infty u^\rho e^{-u} du \\
&= \frac{\Gamma(\rho+1)}{s^{(\rho+1)}}.
\end{aligned}$$

2. Pour $\rho = -\frac{1}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\} &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}.
\end{aligned}$$

Solution 2.2. *1. On a,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x(.))(s) &= \int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}\,dt + \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}\,dt \\
&= \left.\frac{te^{-st}}{-s}\right|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\,dt + \lim_{\tau\Rightarrow\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_1^\tau \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s^2} \qquad (\mathrm{Re}\,(s) > 0).
\end{aligned}$$

2. Calculons la transformation de Laplace de la fonction $x(t) =$

t^n, $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{x(.)\}(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt \qquad (par\ partie)\\
&= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{(n-1)} e^{-st} dt\\
&= \frac{n(n-1)}{s^2}\int_0^\infty t^{(n-2)} e^{-st} dt\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{s^3}\int_0^\infty t^{(n-3)} e^{-st} dt\\
&.\\
&.\\
&.\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...3.2}{s^{n-1}}\int_0^\infty t e^{-st} dt\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...3.2}{s^{n-1}}.\frac{1}{s^2}\\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

3. *Calculons la transformation de Laplace de la fonction* $x(t) = e^{-kt}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{x(.)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-kt} e^{-st} dt\\
&= \int_0^\infty e^{-(s+k)t} dt\\
&= \frac{-1}{s+k} e^{-(s+k)}|_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{s+k}.
\end{aligned}
$$

4. *Calculons la transformation de Laplace de la fonction* $x(t) =$

$erf(\frac{a}{2\sqrt{t}})$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{x(.)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2}du\right]dt \quad \textit{en posant } u = \frac{a}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{s}\left[1-e^{-a\sqrt{s}}\right].\end{aligned}$$

Solution 2.3. *Nous allons démontrer que*

$$\mathscr{L}[\alpha x(.)+y(.)] = \alpha\mathscr{L}[x(.)]+\mathscr{L}[g(.)].$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\alpha x(.)+y(.)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}[\alpha x(t)+y(t)]\,dt \\ &= \alpha\int_0^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt+\int_0^{+\infty} e^{-st}y(t)\,dt \\ &= \alpha\mathscr{L}[x(.)](s)+\mathscr{L}[y(.)](s).\end{aligned}$$

Solution 2.4. *Posons*

$$x(s) = a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n.$$

Nous avons

$$\mathscr{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

donc

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x(t)) &= \sum_{k=0}^{n} a_k\mathscr{L}(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_kk!}{s^{k+1}}.\end{aligned}$$

Solution 2.5. *Calculons la transformation de Laplace de la fonction* $x(t) = \cosh at$.

Nous avons

$$x(t) = \cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[x(.)\right](s) &= \frac{1}{2}.\mathscr{L}\left[e^{at}\right]+\frac{1}{2}.\mathscr{L}\left[e^{-at}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-a)}+\frac{1}{(s+a)}\right]=\frac{s}{s^2-a^2},\end{aligned}$$

d'ou

$$\mathscr{L}\left[\cosh at\right](s)=\frac{s}{s^2-a^2}.$$

Solution 2.6. *Nous avons*

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}(s)=s\mathscr{L}\{x'(t)\}(s)-x'(0),$$

Alors

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}(s)=s^2\mathscr{L}\{x(t)\}(s)-sx(0)-x'(0),$$

Il est facile de voir que

$$\mathscr{L}\{x'''(t)\}(s)=s^3\mathscr{L}\{x(t)\}(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0).$$

$$\mathscr{L}\{x^{(n)}(t)\}(s)=s^n\mathscr{L}\{x(t)\}(s)-\sum_{k=0}^{k=n-1}s^kx^{n-1-k}(0).$$

Solution 2.7. *Posons* $y(t)=t^ne^{-t}$, *alors*

$$\mathscr{L}\left(P_n(t)\right)(s)=\mathscr{L}\left(e^t\frac{1}{n!}y^{(n)}\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(y^{(n)}\right)(s) &= s^n\mathscr{L}\left(y\right)(s) \\ &= \frac{s^nn!}{(s+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(P_n(t)\right)(s) &= \mathscr{L}\left(e^t\frac{1}{n!}y^{(n)}\right)(s) \\ &= \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}, \qquad (\mathscr{R}e(s)>1).\end{aligned}$$

Solution 2.8. *Calculons la transformée de Laplace $\mathscr{L}(\varphi(.))(s)$. Nous avons*

$$\mathscr{L}(e^{kt})(s) = \frac{1}{s-k}, \quad \mathscr{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathscr{L}(\cos(kt))(s) = \frac{s}{s^2+k^2}.$$

Alors

$$\mathscr{L}(\varphi(.))(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+k^2}, \quad s > 2.$$

Solution 2.9. *Nous avons*

$$\mathscr{L}(\cos(kt))(s) = \frac{s}{s^2+k^2}.$$

Comme

$$\sin(kt)(s) = -\frac{1}{k}\frac{d}{dt}(\cos(kt)),$$

nous trouvons

$$\mathscr{L}(\sin(kt))(s) = -\frac{1}{k}(-\cos(0) + \frac{s^2}{s^2+k^2}) = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

Bibliographie

[1] D. Brian, *Integral Transforms and Thier Applications*, Springer.

[2] G. Doetch, *introduction to the theory and application of the Laplace transforme*, Springer, 1974.