Solutions des exercices.

TD4

Exercice 5.

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}$, on a $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

Donc $f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}+\frac{Z^2+1}{2z}} = \frac{2z}{z^2+2\sqrt{5}z+1}$.

Les pôles de la fonction $g : z \mapsto g(z) = \frac{2}{z^2+2\sqrt{5}z+1}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4\,(1)\,(1) = 20 - 4 = 16$

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{5}-4}{2} = -\sqrt{5} - 2$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{5}+4}{2} = -\sqrt{5} + 2.$

Comme $\lim\limits_{z\longrightarrow z_1} g(z) = \frac{1}{0} = \infty$ et $\lim\limits_{z\longrightarrow z_1} (z - z_1)g(z) =$ constante, $\lim\limits_{z\longrightarrow z_2} g(z) = \frac{1}{0} = \infty$ et $\lim\limits_{z\longrightarrow z_2} (z - z_2)g(z) =$ constante donc z_1 et z_2 sont des pôles simples pour g.

γ est le cercle unité, c-à-d: $x^2 + y^2 = 1$, donc $z_1 \notin \gamma$ et $z_2 \in \gamma$ et $\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi \mathrm{Res}(g,\ z_2)$.

On a $\mathrm{Res}(g,\ z_2) = \lim\limits_{z\longrightarrow z_2} (z-z_2)g(z) = \lim\limits_{z\longrightarrow z_2} \frac{2}{z-z_1} = \frac{2}{-\sqrt{5}+2-\left(-\sqrt{5}-2\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

Donc $\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi\frac{1}{2} = i\pi.$

Déduire $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}dt = \pi.$

On a

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}dt = \int_0^{2\pi} \frac{2z}{z^2+2\sqrt{5}z+1}dt$$

comme $z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}dt$ et $dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{2z}{z^2+2\sqrt{5}z+1}dt &= \int_0^{2\pi} \frac{2z}{z^2+2\sqrt{5}z+1}\,\frac{dz}{iz} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{z^2+2\sqrt{5}z+1}dz \\
&= \int_\gamma g(z)dz \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

1) Les points singuliers de f.

on cherche les racines de l'équation: $z^2 + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(1) = -4 = (2i)^2$

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0-2i}{2} = -i$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0+2i}{2} = i$

leurs natures

$\lim\limits_{z\rightarrow z_1} f(z) = \frac{1}{0} = \infty$ et $\lim\limits_{z\rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim\limits_{z\rightarrow z_1} (z - z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim\limits_{z\rightarrow z_1} \frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{-i-i} = \frac{1}{-2i}$ =constante, donc z_1 est un pôle simple pour f.

$\lim\limits_{z\to z_2} f(z) = \frac{1}{0} = \infty$ et $\lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) = \lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim\limits_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$ =constante, donc z_2 est un pôle simple pour f.

Les résidus de f .

$\text{Res}(f,\ z_1) = \lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim\limits_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{-i-i} = \frac{1}{-2i}$.

$\text{Res}(f,\ z_2) = \lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim\limits_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$.

On a $z_2 = i \in \gamma$ et $z_1 = -i \notin \gamma$ où γ est le rectangle de sommets -1+2i, 1+2i, 1+$\frac{1}{2}i$, -1+$\frac{1}{2}i$.

En appliquant le théorème des résidus on trouve: $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\text{Res}(f,\ z_2) = 2i\pi\frac{1}{2i} = \pi$.

Maintenant γ est le rectangle de sommets -2+3i, -2-3i, 2 dans ce cas $z_1 \in \gamma$ et $z_2 \in \gamma$ donc :

$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\sum\limits_{i=1}^{2}\text{Res}(f,\ z_i) = 2i\pi\left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i}\right] = 0$.

TD 3.

Exercice 1. En utilisant la formule intégrale de Cauchy calculer l'intégrale: $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{e^z}{z(z+1)}dz$.

On a $|z-1| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x+iy-1| = (\frac{3}{2})^2$, c-à-d: $(x-1)^2 + y^2 = (\frac{3}{2})^2$ qui est le cercle de centre $(1,\ 0)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

Les point singuliers de la fonction $z \to \frac{e^z}{z(z+1)}$ sont $z_1 = 0$ et $z_2 = -1$.

Pour z_1 : $|z_1 - 1| = |0-1| = |-1| = 1 < \frac{3}{2}$ donc $z_1 \in \gamma$, et pour $z_{2:}$ $|z_2 - 1| = |-1-1| = 2 > \frac{3}{2}$ donc $z_2 \notin \gamma$.

$\exists g : z \to g(z) = \frac{e^z}{z+1}$ analytique sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ tq:

$$\int_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{e^z}{z\,(z+1)}dz = \int_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{g(z)}{z}dz$$

En appliquant la formule intégrale de Cauchy on obtient:

$$\int_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{g(z)}{z}dz = 2i\pi g(0) = 2i\pi\frac{e^0}{0+1} = 2i\pi.$$

$\left(\text{ici } \int_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{g(z)}{z}dz = \int_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{g(z)}{(z-0)^{0+1}}dz \text{ donc } z_1 = 0 \text{ et } n = 0\right)$

TD 2.

Exercice 2.

Soit $f : z \to f(z) = \frac{1}{1-z}$ où $z \neq 1$.

f est-elle analytique?

Séparons en premier la partie réelle et la partie imaginaire de f.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-x-iy} \\ &= \frac{1-x+iy}{(1-x-iy)\,(1-x+iy)} \\ &= \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \end{aligned}$$

On a $P(x,y) = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$ et $Q(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2+y^2}$ où $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$.

Remarquons que les fonctions P et Q sont de classe C^1, reste à examiner les équations de Cauchy-Riemann.

$\frac{\partial}{\partial x} P(x,y) = \frac{(-1)\left((1-x)^2+y^2\right)-2(1-x)(-1)(1-x)}{((1-x)^2+y^2)^2} = \frac{-y^2+(1-x)^2}{((1-x)^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial}{\partial y} Q(x,y) = \frac{(1)\left((1-x)^2+y^2\right)-2y^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = \frac{-y^2+(1-x)^2}{((1-x)^2+y^2)^2}$.

Donc $\frac{\partial}{\partial x} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} Q(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) = \frac{2(1-x)y}{((1-x)^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{-2y(1-x)}{(1-x)^2+y^2)^2}$.

Donc $\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} P(x,y)$.

Les fonctions P et Q vérifient les équations de Cauchy-Riemann, et comme P et Q sont de classe C^1 alors f est analytique sur $\mathbb{C} - \{1\}$.