Solution

3) $f(z)=\dfrac{1}{z-2i}$

$$\int_{\gamma}\frac{1}{z-2i}\,dz=\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2i+4e^{it})-2i}\,4ie^{it}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{4ie^{it}}{4e^{it}}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} i\,dt = i\,2\pi.$$

Exercice 4

En utilisant la formule de Cauchy, calculer les intégrales suivantes :

$$= \int_{-1}^{0} -t^2 \, dt + \int_{0}^{1} t^2 \, dt + i\pi$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_{0}^{1} + i\pi$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + i\pi = i\pi$$

Donc :

$$I = i\pi$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{\gamma} (2z+1) \, dz \; / \; \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \; \gamma(t) = 1 + it$

2) $\int_{\gamma} (z + 2\bar{z}) \, dz \; / \; \gamma : [0,2] \to \mathbb{C}, \; \gamma(t) = t - 2i$

3) $\int_{\gamma} \frac{1}{z - 2i} \, dz, \; \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \; \gamma(t) = 2i + 4e^{it}$

$\gamma_2 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\gamma_2(t) = t$.

$\gamma_3 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\gamma_3(t) = e^{it}$.

Solution

$$I = \int_{\gamma_2 \cup \gamma_3} |z|\bar{z}\, dz \quad , \quad f(z) = |z|\bar{z}$$

$$= \int_{\gamma_2} f(\gamma_2)\, \gamma_2'(t)\, dt + \int_{\gamma_3} f(\gamma_3)\, \gamma_3'(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} |\gamma_2(t)|\, \overline{\gamma_2(t)} \cdot \gamma_2'(t)\, dt + \int_{0}^{\pi} |\gamma_3(t)|\, \overline{\gamma_3(t)} \cdot \gamma_3'(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} |t| \cdot t\, dt + \int_{0}^{\pi} |e^{it}|\, e^{-it} \cdot i e^{it}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} |t|\, t\, dt + \int_{0}^{1} |t|\, t\, dt + i \int_{0}^{\pi} dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\int_0^1 \left(\sqrt{1+t^2}\right)'$$

$$= -\left.\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = -\sqrt{2} + 1$$

D'où : $\int_\gamma f(z)\,dz = 1 - \sqrt{2}$.

Exercice 2.

Calculer l'intégrale suivante I le long du chemin γ_1, où :

$I = \int_{\gamma_1} |z|\,\bar{z}\,dz$, $\gamma_1 = \gamma_2 \cup \gamma_3$, on définit les deux chemins γ_2 et γ_3 par :

3) f n'est pas analytique, car

les équations de Cauchy Riemann

ne sont pas satisfaites.

4) $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

où $f(\gamma(t)) = \dfrac{\gamma(t)-1}{|\gamma(t)|}$

$= \dfrac{1+it-1}{|1+it|}$

$= \dfrac{it}{\sqrt{1+t^2}}$

et $\gamma'(t) = (1+it)' = i$

Donc: $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 \dfrac{it}{\sqrt{1+t^2}}\cdot i\,dt$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 2y^2}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, y}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\,\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Solution :

1) $f(z) = \dfrac{z-1}{|z|} = \dfrac{x+iy-1}{|x+iy|}$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donc : $p(x,y) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2) $$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - (x-1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-2x^2+2x}{2\,(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{x+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

Exercices

Exercice 1.

Soit la fonction f définie par :

$$f(z) = \frac{z-1}{|z|}$$

1) Trouver p la partie réelle et q la partie imaginaire de la fonction f si $z = x + iy$

2) Calculer $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$.

3) f est-elle analytique ?

4) On considère le chemin γ défini par :

$\gamma(t) = 1 + it$ pour $t \in [0,1]$, calculer

$\int_\gamma f(z)\,dz$.