Table of Contents

Page

I. Généralité sur les EDP(s) 1

1.1 Introduction 1

1.2 Définitions générales 1

1.3 Classification des équations aux dérivées partielles 4

1.4 Condition initiale et les conditions aux limites 4

1.4.1 Dans le cas stationnaire. 5

1.4.2 Dans le cas d'évolution 6

II. La méthode des caractérisques pour les EDP(s) du premier ordre . . . 7

2.1 Définitions 7

2.1.1 Cas particuliers 10

III. Les formes canoniques des EDP(S) linéaires du second ordre dans IR^2 16

3.1 Classification des EDP(S) linéaires du second ordre dans IR^2 16

3.2 La forme canonique des éqution hyperboliques 20

3.3 La forme canonique des éqution paraboliques 23

3.4 La forme canonique des équations elliptique 25

IV. La méthode de séparation des variables et les séries de Fourier 29

4.1 Résolution de l'équation de la chaleur par la méthode de séparation des variables 29

4.2 Les séries de Fourier 32

4.2.1 Conditions suffisante de Dirichlet 34

4.2.2 Identité de Parseval 35

4.2.3 Convergence uniforme 35

4.2.4 Les séries de Fourier complexes 36

4.2.5 Les séries de Fourier doubles 36

Page

V. Transformées de Fourier et de Laplace 37

5.1 La transformée de Fourier 37

5.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier 38

5.2 Application de la transformée de Fourier 40

5.2.1 L'équation de la chaleur 40

5.2.2 L'équation des ondes 42

5.2.3 L'équation de Laplace 43

5.3 La transformée de Laplace 44

5.3.1 Propriétés de la transformée de Laplace 45

5.4 L'application de la transformée de Laplace 47

5.4.1 L'équation de diffusion 47

I. Généralité sur les EDP(s)

1.1 Introduction

Le début et le développement de la théorie des EDP(s) étaient relié aux sciences physique et à l'effort pour décrire quelques phénomènes et processus physiques à travers le langage mathématique selon la possibilité et la précision. Avec l'apparition des nouvelles branches de la science, cet outil mathématique a aussi trouvé son utilisation en dehors de la physique, la complexité des problèmes étudies a donné naissance à une nouvelle branche appelée modélisation mathématique. La théorie des EDP(s) a été mis à part comme un domaine scientifique.

Dans notre étude, la notion d'un modèle mathématique est considérée comme une présentation ou une interprétation abstraite de la réalité physique qui est accessible à l'analyse et au calcul.

1.2 Définitions générales

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction à plusieurs variables indépendantes $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{tq} \quad x \to u(x)$$

où

$$u : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{tq} \quad (t, x) \to u\,(t, x)$$

si le temps intervient.

Dans le cas où $m = 1$, on parle du "*cas scalaire*". On notera alors les dérivées partielles de u par rapport à x_i :$\frac{\partial u}{\partial x_i}$, ou plus simplement $u_{x_i}.Legradient \nabla u$ est le vecteur colonne rasemblant les u_{x_i} cd $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n})^t$.

Dans le "*cas vectoriel*" , on notera les dérivées partielles de u_j par rapport à x_i :$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ou plus simplement u_{j,x_i} .

La matrice jacobienne rasemble alors les dérivées partielles càd

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$$

Soit u une fonction scalaire

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Définition 1 *Une équation différentielle aux dérivées partielles est une relation entre la fonction* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et ces dérivées partielles qui peut formellement se mettre sous la forme :*

$$F\left(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, ...\right) = 0 \tag{1}$$

Définition 2 *On définit l'ordre d'une équation différentielle EDP comme l'ordre de dérivation le plus grand des dérivées partielles apparaissant dans la relation* (1) .

Définition 3 *On dit qu' une équation différentielle aux dérivées partielles est linéaire si la relation* (1) *peut se mettre sous la forme d'un polynôme de degré 1 dont les coefficients ne dépendent que des variables indépendantes* x_i*:*

$$a(x) + b(x)u + \sum_{1\leq i\leq n} c_i(x)u_{x_i} + \sum_{1\leq i,j\leq n} d_{ij}u_{x_i x_j} + ... = 0 \tag{2}$$

Remarque 4 *Si les coefficients du polynome* $a(x), b(x), c_i(x)$ *et* $d_{ij}(x)$ *ne dépent que plus de* x*, l'équation différentielle est linéaire.*

Définition 5 *Une EDP est quasi-linéaire quand elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre plus élvé pour chacune des variables.*

Définition 6 *On dit qu'une équation différentielle aux dérivées partielles linéaire est homogène si elle ne contient pas de terme indépendant de* u *et de ses dérivées. Elle peut se* *mettre sous la forme :*

$$b(x)u + \sum_{1\leq i\leq n} c_i(x)u_{x_i} + \sum_{1\leq i,j\leq n} d_{ij}u_{x_ix_j} + ... = 0 \qquad (3)$$

Remarque 7 *Une équation différentielle aux dérivées partielles linéaire homogène ne contient ni termes constants, ni termes dépendant seulement de x.*

Exemple 8 *1-* $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$ *est une EDP linéaire d'ordre 2 homogène.*

2_ $xyu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = c$ est une EDPquasi- linéaire d'ordre 2 non homogène.

3-$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - c = 0$ est une EDP d'ordre 2 non linéaire et non homogène.

4- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^3$ est une EDP non linéaire et homogène d'ordre 2.

5- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F$est une EDP linéaire et non homogène d'ordre 4.

6- $\Delta u = 0$ l'équation de Laplace est une EDP linéaire et homogène d'ordre 2.

7- $u_t = k\Delta u + q$ l'équation de la chaleur est une EDP linéaire non homogène d'ordre 2.

8- $u_{tt} = C^2\Delta u$ avec $C \in \mathbb{R}$ l'équation des ondes est une EDP linéaire homogène d'ordre 2.

9- $u_t + f(u)u_x = u_{xx}$ l'équation de Burger généralisée est une EDP non linéaire et homogène d'ordre 2.

Définition 9 *Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω telle que la relation* (1) *soit satisfaite pour toute les valeurs des variables dans* Ω.

Exemple 10 *Trouver les fonctions $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;$(x, y) \to u(x, y)$ telles que* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.......... $(*)$

On pose $V(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ donc $\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 0$ càd $V(x,y) = c(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = c(x) \Rightarrow u(x,y) = c(x)y + b(x)$.

Alors l'EDP $(*)$ admet une solution unique, lorsqu'on suppose des conditions sur le bord de Ω :$\partial\Omega$.

Exercice 11 *Trouver les solutions* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *;*$(x,y) \to u(x,y)$ *telles que* $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Remarque 12 *La solution générale d'une EDP non homogène est la somme d'une solution particulière de l'EDP non homogène et de solution générale de l'EDP homogène.*

Définition 13 *Le principe de superposition découle directement de la structure linéaire des équations et de l'homogénéité. Il peut s'énoncer ainsi : si* u_1 *et* u_2 *vérifient (3) alors* $\alpha u_1 + \beta u_2$ *vérifie aussi (3)* , $\forall \alpha, \beta \in IR$.

1.3 Classification des équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classée selon différents points de vue.

1. Si le temps est l'une des variables indépendantes de la fonction cherchée, on parle à des équations d'évolutions.
2. Si l'équation contient seulement les variables spatiales nous parlons à des équations stationnaires.
3. L'ordre de l'équation différentielle.
4. Si l'équation constitue uniquement d'une combinaison linéaire de u et de ses dérivées, nous parlons d'une équation linéaire.
5. Dans le cas contraire, on parle à des équations non linéaires.

1.4 Condition initiale et les conditions aux limites

Comme dans le cas des EDO(s) une seule EDP ne fournit pas d'informations suffisantes pour déterminer la solution unique de l'équation, nous besoin plus d'informations.

1.4.1 Dans le cas stationnaire.

Généralement il est des conditions aux limites qui conjoitement avec l'équation. Dans ce cas le pb est un pb de valeurs aux limites.

Exemple 14 *Soit le pb suivant*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x,y) \in B(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\right\} \\ u(x,y) = 0 \quad (x,y) \in \partial B(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\right\} \end{cases}$$

Généralement si Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^3$, on distingue trois types des conditions aux limites.

1.4.1.1 Condition de Dirichlet

$$u\left(x,y,z\right) = g\left(x,y,z\right) \qquad (x,y,z) \in \partial\Omega.$$

.

1.4.1.2 Condition de Newmann

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(x,y,z\right) = g\left(x,y,z\right) \qquad (x,y,z) \in \partial\Omega.$$

.

1.4.1.3 Condition de Robin (de Newton)

$$A\frac{\partial u}{\partial n}\left(x,y,z\right) + Bu\left(x,y,z\right) = g\left(x,y,z\right) \qquad (x,y,z) \in \partial\Omega.$$

. où $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale et A, B sont des constantes tq $A^2 + B^2 \neq 0$.

Remarque 15

- *On peut trouver dans le pb des conditions mixtes.*
- *Dans le cas où $g = 0$ les conditions sont appelées des conditions homogènes, dans le cas contraire sont appelées des conditions nonhomogènes.*

Exemple 16 *Soit* $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *la frontière* $\partial\Omega = \{a, b\}$. *Les conditions de Newmann non homogènes sont*

$$u'(a) = g_1, \quad u'(b) = g_2$$

Si $\Omega = (0, \infty)$ les conditions de Dirichlet homogènes sont définies par

$$u(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} u(x) = 0.$$

1.4.2 Dans le cas d'évolution. Généralement nous traitons à côté des conditions aux limites des conditions initiales qui conjoitement avec l'équation .

Exemple 17 *Soit le pb suivant:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t \in (0, \infty)\,, \ x \in (0, 1) \\ u\,(0, t) = u\,(1, t) = 0 \\ u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,, \ u_t\,(x, 0) = \psi\,(x) \end{cases}$$

c'est un pb de Cauchy avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogène(l'équation des ondes).

La fonction φ désigne le déplacement initial et ψ la vitesse initiale. Si on cherche la solution classique, les fonctions φ et ψ sont supposés continues et les dérivées partielles de u (u_{xx} et u_{tt}) sont suposés continues, pour cela les conditions aux limites et les conditions initiales doivent satisfaire aux conditions de compatibilité

$$\varphi\,(0) = \varphi\,(1) = 0$$

Une autre notion que nous présentons dans cette partie, est celle d'un pb bien posé. Le pb est bien posé si les conditions suivantes sont satisfaite

1- La solution du pb existe et unique.

2- La solution est stable.

II. La méthode des caractérisques pour les EDP(s) du premier ordre

Ce chapitre est consacré à résoudre les EDP(s) du premier ordre par la méthode des caractéristique qui consiste à convertit une EDP à un système d'équations différentielles ordinaires EDO approprié. Pour cela nous cherchons une courbe(changement de variable)à l'interieur de Ω de sorte que si on projette l'EDP, on obtient un système d'EDO.

2.1 Définitions

Définition 18 *Une équation aux dérivées partielles ou EDP du premier ordre est une équation reliant une fonction à ses dérivées partielles du premier ordre . Elle a la forme générale suivante*

$$F(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1}$$

où F est une relation définie sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,$u : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et ∇ est l'opérateur gradient.

Maintenant, nous considérons le problème aux limites de type Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} F(x, u, \nabla u) = 0 \qquad sur\ \Omega \\ u(x) = g(x) \qquad sur\ \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

où g :$\Gamma \subset \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de régularité adéquate de sorte que (2) admet une solution unique.

Exemple 19 • *l'équation de Transport unidimensionnel*

$$\partial_t u\,(x,t) + c\ \partial_x u\,(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, t \succ 0$$

où $c \succ 0$ est dite la vitesse

- *Cas multidimensionnel*

$$\partial_t u\,(x,t) + c.\nabla u\,(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \succ 0$$

où $c = (c_j)_{1 \leq j \leq n}$ est un vecteur de composantes positive.

- *Equation d'Euler unidimensionnel*

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\,\partial_x u(x,t) + \partial_x p(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, t \succ 0$$

  où u et p sont la vitesse et la pression respectivement.

- *Cas multidimensionnel*

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\,.\nabla u(x,t) + \nabla p(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \succ 0$$

Définition 20 *Soit $x(s) = (x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s))$ une courbe paramétrisée de paramètre $s \in I \subset \mathbb{R}$. La dérivation le long de la courbe x est définie comme suit*

$$\dot{u}(x(s)) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(x)\,\partial_{x_i} u(x(s)).$$

Soit $x(s) = (x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s))$ une courbe paramétrisée de paramètre $s \in I$. Supposons u est de classe C^2 sur Ω solution de (1).

Définissons

$$z(s) = u(x(s)) \tag{3}$$

les valeurs de u le long de la courbe, et posons

$$p(s) = (p_i(s))_{1 \leq i \leq n} = \nabla u(x(s)) = (\partial_{x_i} u(x(s)))_{1 \leq i \leq n} \tag{4}$$

les valeurs du gradient de u le long de la courbe.

On doit choisir la fonction $x(.)$ de sorte qu'on peut calculer explicitement $z(.)$ et $p(.)$,pour cela,on fait la différentiation de p , on trouve

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(s) &= \frac{d}{ds}\partial_{x_i}u(x(s)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\partial_j\partial_{x_i}u(x(s))\,\dot{x_j}(s) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_jx_i}u(x(s))\,\dot{x_j}(s) \qquad i=1,...,n \end{aligned} \tag{5}$$

On voit l'apparition du 2^{eme} dérivation, pour éliminer cet dérivation on dérive l'edp(1) par rapport a $x_{i,}$ on obtient

$$\partial_{x_i}F(x,u,\nabla u)+\frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\nabla u)\,\partial_{x_i}u+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}(x,u,\nabla u)\,\frac{\partial p_j}{\partial x_i}=0 \tag{6}$$

On utilise les relations (3) et(4) ,on aura

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}F(x,z,p)+\frac{\partial F}{\partial u}(x,z,p)\,\partial_{x_i}z+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}(x,z,p)\,\frac{\partial p_j}{\partial x_i} &= \\ \partial_{x_i}F(x,z,p)+\frac{\partial F}{\partial u}(x,z,p)\,\partial_{x_i}z+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}(x,z,p)\,\partial_i\partial_j z &= 0\end{aligned} \tag{7}$$

pour surmonter ce pb, on pose

$$\dot{x}_j(s)=\frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s),z(s),p(s)) \tag{8}$$

donc la relation(7) devient

$$\partial_{x_i}F(x(s),z(s),p(\ s))+\frac{\partial F}{\partial z}(x(s),z(s),p(s))\,\partial_{x_i}z+\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j(s)\,\partial_i\partial_j z(s)=0$$

on utilise la relation (5) on obtient

$$\dot{p}_i(s)=-\partial_{x_i}F(x(s),z(s),p(s))-\frac{dF}{dz}(x(s),z(s),p(s))\,p_i(s) \tag{9}$$

Daprés les relations $(5), (8)$ et (9) précédentes, on obtient le syst d'edo suivant

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -\nabla_x F(x(s), z(s), p(s)) - \frac{dF}{dz}(x(s), z(s), p(s))\, p(s) & (a) \\ \dot{z}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) .p(s) & (b) \\ \dot{x}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) & (c) \end{cases} \quad (10)$$

le syst précédent contient $(2n+1)$ d'EDO du premer ordre.

Remarque 21 *Le système* (10) *est composé de 2n+1 d'EDO du premier ordre d'une importance remarquable, il est compris les équations caractéristiques du syst non linéaire EDP du premier ordre* (1)

Définition 22 *les fonctions $p(s)$ et $x(s)$ sont appelées les fonctions caractéristiques.*

Théorème 23 *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une solution du syst non linéaire* (1) *du premier ordre dans Ω. Supposons que $x(.)$est une solution de$(10-(c))$ avec $p(.) = \nabla u(x(.))$ et $z(.) = u(x(.))$. Alors $p(.)$ et $z(.)$ sont des solutions respectivement du syst d'EDO* (10) *de sorte que $x(.) \in \Omega$.*

Remarque 24 *Les caractéristiques d'EDO forment un système fermé d'équation pour $x(.)$, $z(.) = u(x(.))$ et $p(.) = \nabla u(x(.))$, dés que u est une solution régulière de l'EDP non linéaire donnée par* (1).

2.1.1 Cas particuliers.

$\mathbf{1}^{er}$**cas:** Supposons que F est linéaire càd

$$F(x,z,p) = b(x).p + c(x)z$$

alors l'EDP s'écrit comme suit

$$b(x).\nabla u(x) + c(x)u(x) = 0 \quad x \in \Omega \tag{11}$$

où $b(x) = \nabla_p F$ et $\dot{x}(s) = b(x(s))$, de plus l'équation (b) du syst (10) prend la forme

$$\dot{z}(s) = b(x).p(s) \tag{12}$$

puisque $p(.) = \nabla u(x(.))$ alors de (11) et (12), on obtient le syst d'EDO caractéristique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(x)z(s) \end{cases} \tag{13}$$

Exemple 25 *Considérons le problème aux limites suivant:*

$$\begin{cases} x_1\partial_{x_2}u - x_2\partial_{x_1}u = u \quad & si \;\; x \in \Omega \\ u(x) = g(x) \quad & si \;\; x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

où $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \succ 0 \text{ et } x_2 \succ 0\right\}$ *et* $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ *est une fonction régulière avec* $\Gamma = \{x = (x_1, x_2); x_1 \succ 0 \text{ et } x_2 = 0\}$. *Alors l'EDP* (14) *a la même forme que* (11) *pour* $b = (-x_2, x_1)$ *et* $c = -1$. *Ansi le syst d'EDO caractéristique* (10) *est donné par*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = -x_2(s) \\ \dot{x}_2(s) = x_1(s) \\ \dot{z}(s) = z(s) \end{cases} \tag{15}$$

par conséquent le syst se réduit à

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(s) = -x_1(s) \\ \dot{z}(s) = z(s) \end{cases}$$

la solution de ce syst est donnée par

$$\begin{cases} x_1(s) = x_0 \cos s, \;\; x_2(s) = x_0 \sin s \\ z(s) = z_0 e^s = g(x_0)e^s \end{cases}$$

où $x_0 \succ 0$ *et* $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$. *Nous fixons* $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ *et nous sélectionnons* $s \succ 0$ *de sorte que* $(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (x_0 \cos s, x_0 \sin s)$ *on déduit que* $x_0 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *et*

$s = \arctan \frac{x_2}{x_1}$. *Donc on obtient*

$$\begin{aligned} u\left(x_1, x_2\right) &= u\left(x_1\left(s\right), x_2\left(s\right)\right) \\ &= z\left(s\right) = g(x_0)e^s \\ &= g\left(\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}} \end{aligned}$$

Remarque 26 *On voit que la solution du problème aux limites* (14) *dépende clairement de la condition aux limites* g*, c'est-à-dire les valeurs de* g *sur* Γ*.*

2ème cas Supposons que F est quasi-linéaire dans le sens ou

$$F\left(x, z, p\right) = b(x, z).p + c(x, z) \tag{16}$$

l'EDP obtenue alors est donnée par

$$b(x, u\left(x\right)).\nabla u\left(x\right) + c(x, u\left(x\right))$$

où $\nabla_p F = b\left(x, z\right)$ donc $\dot{x}\left(s\right) = b\left(x, z\left(s\right)\right)$ ainsi l'équation$(10 - b)$ du syst d'EDO s'écrit

$$\dot{z}\left(s\right) = b\left(x, z\left(s\right)\right).p\left(s\right) = -c(x, z\left(s\right))$$

Donc le système caractéristique d'EDO obtenu dans le cas qusi-linéaire s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}\left(s\right) = b\left(x, z\left(s\right)\right) \\ \dot{z}\left(s\right) = -c(x, z\left(s\right)) \end{cases} \tag{17}$$

Exemple 27 *Soit le problème aux limites suivant:*

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u = u^2 \quad si \quad x \in \Omega \\ u(x) = g(x) \quad si \quad x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\; x_2 \succ 0\right\}$ *et* $\Gamma = \{x = (x_1, x_2)\,;\; x_2 = 0\}$. *Dans ce cas* $b =$ $(1,1)$ *et* $c = -z^2$ *le syst* (17) *devient comme suit:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = 1, \dot{x}_2(s) = 1 \\ \dot{z}(s) = z^2 \end{cases}$$

en intégrant sur l'intervalle $[0, s]$ *il vient*

$$\begin{cases} x_1(s) = x^0 + s, \quad x_2(s) = s \\ z(s) = \frac{z^0}{1 - sz^0} \end{cases}$$

où $x^0 \in \mathbb{R},\; s \succeq 0$ *de sorte que le dénominateur soit différent de zéro. Fixons un point* $(x_1, x_2) \in \Omega$ *et soient* $s \succ 0$ *et* $x^0 \in \mathbb{R}$ *tels que* $(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = u\left(x^0 + s, s\right)$ *càd*

$$\begin{cases} x^0 = x_1 - x_2 \\ s = x_2 \end{cases}$$

Donc la solution est donnée par

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) \\ &= \frac{g\left(x^0\right)}{1 - sg\left(x^0\right)} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2)}. \end{aligned}$$

3$^{\grave{e}me}$**cas:** Dans le cadre générale, on doit intégrer le syst caractéristique d'EDO (10), s'il est possible.

Exemple 28 *Considérons le pb aux limites non -linéaire suivant:*

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u(x)\, \partial_{x_2} u(x) = u(x) \quad & si \quad x \in \Omega \\ u(x) = x_2^2 \quad si \quad x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \succ 0\right\}$ *et* $\Gamma = \{x = (x_1, x_2);\ x_1 = 0\}$ *Ici* $F(x, z, p) = p_1 p_2 - z$. *Donc le syst* (10)*s'écrit comme suit:*

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -\nabla_x F(x(s), z(s), p(s)) - \frac{dF}{dz}(x(s), z(s), p(s))\, p(s) \\ \dot{z}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) .p(s) \\ \dot{x}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p}_1(s) = p_1(s), \dot{p}_2(s) = p_2(s) \\ \dot{z}(s) = 2p_1(s)\, p_2(s) \\ \dot{x_1}(s) = p_2(s),\ \dot{x_2}(s) = p_1(s) \end{cases} \tag{18}$$

En intégrant ces équations sur $[0, t]$ *on obtient*

$$\begin{cases} x_1(s) = p_2^0(e^s - 1), \quad x_2(s) = x^0 + p_1^0(e^s - 1) \\ z(s) = z^0 + p_1^0 p_2^0 \left(e^{2s} - 1\right) \\ p_1(s) = p_1^0 e^s, \quad p_2(s) = p_2^0 e^s. \end{cases}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ *et* $z^0 = \left(x^0\right)^2$. *Nous devons déterminer* $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right)$. *Puisque* $u(x) = x_2^2$ *sur* Γ *et* $p_2^0 = \partial_{x_2} u\left(0, x^0\right) = 2x^0$ *(le point* $\left(0, x^0\right) \in \Gamma$*). De plus l'EDP* $\partial_{x_1} u(x)\, \partial_{x_2} u(x) = u(x)$ *elle- même implique* $p_1^0 p_2^0 = z^0 = \left(x^0\right)^2$, *et ainsi* $p_1^0 = \frac{x^0}{2}$. *Par conséquent, les formules précédentes nous donne*

$$\begin{cases} x_1(s) = 2x^0(e^x - 1), \quad x_2(s) = \frac{x^0}{2}(e^x + 1) \\ z(s) = \left(x^0\right)^2 e^{2x} \\ p_1(s) = \frac{x^0}{2} e^s, \quad p_2(s) = 2x^0 e^s. \end{cases}$$

Fixons un point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ *et choisir* s *et* x^0 *tels que*

$$x = (x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = \left(2x^0(e^s - 1), \frac{x^0}{2}(e^s + 1)\right)$$

cette identité implique

$$\begin{cases} x^0 = \frac{4x_2 - x_1}{4} \\ e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1} \end{cases}$$

Donc la solution est donnée par:

$$\begin{aligned} u\left(x_1, x_2\right) &= u\left(x_1\left(s\right), x_2\left(s\right)\right) = z\left(s\right) = \left(x^0\right)^2 e^{2x} \\ &= \frac{\left(x_1 + 4x_2\right)^2}{16}. \end{aligned}$$

III. *Les formes canoniques des EDP(S) linéaires du second ordre dans IR^2*

Dans ce chapitre on va prouver que si l'EDP est hyperbolique (resp parabolique, elliptique) dans un domaine Ω, alors on peut trouver un système de coordonées dans lequel l'équation a une forme plus simple que nous appelons la forme canonique de l'équation. De plus la partie principale de la forme canonique de l'équation trouvée est égal à la partie principale d'une équation fondamentale de la physique mathématique du même type (c-à-d éq de la chaleur, éq des ondes,éq de Laplace). C'est des raisons pour lesquelles l'étude de ces équations fondamentales.

3.1 Classification des EDP(S) linéaires du second ordre dans IR^2

Les EDP(s) du second ordre linéaires conduisent à des comportements variés. Afin de séparer les principaux types de comportements, il existe une classification basée sur le classement des coniques (ellipse, hyperbole, parabole). De la même manière que pour les coniques, on introduit une forme canonique qui permet une étude plus systématique.

Considérons donc le cas le plus général d'EDP linéaire du second ordre :

$$L\left[u\right] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{4}$$

où $u(x, y)$ est la fonction inconnue, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ sont des réels qui peuvent dépendre de x et y . Notons

$$L_0\left[u\right] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$$

l'opérateur L_0 est appelé la partie principale de L.

Remarque 29 *Les propriétés des solutions de l'EDP* (4) *dépend essentiellement des termes dont les dérivées partielles sont d'ordre deux càd de l'opérateur L_0 plus précésamant par le signe de discriminant $\delta\left(L\right) = b^2 - ac$.*

Nous classons l'équation selon le signe de $\delta\left(L\right)$.

Définition 30 *On dit que l"équation* (4) *est hyperbolique au point* $(x, y) \in \Omega$ *si*

$$\delta(L) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$$

On dit que l"équation (4) *est prabolique au point* (x, y)*si*

$$\delta(L) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$$

On dit que l"équation (4) *est élliptique au point* (x, y)*si*

$$\delta(L) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0$$

Exemple 31 ***Exemple 32*** *Les trois équations fondamentales de mathématique physique sont données par:*

1. L'équation de la chaleur $u_t - \alpha u_{xx} = f \quad \Rightarrow a = 0,\ b = 0$ et $c = -\alpha$, on a $b^2 - ac = 0 \Rightarrow$ l'équation est de type parabolique.
2. L'équation des ondes $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = f \quad \Rightarrow a = 1,\ b = 0$ et $c = -\alpha^2$, on a $b^2 - ac = \alpha^2 > 0 \Rightarrow$ l'équation est de type hyperbolique.
3. L'équation de Laplace $\Delta u = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = 0$ et $c = 1$, on a $b^2 - ac = -1 < 0 \Rightarrow$ l'équation est de type elliptique.

Exercice 33 *Déterminer le type des équations suivantes:*

1- $u_{xx} - 3u_{xy} = 0$;

2- $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

3- $2u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

Remarque 34
- *Si les coefficients de l'équation ne sont pas constants, le type de l'équation peut être différent dans différentes parties du plan* (x, y).
- *On peut avoir des EDPS de types mixte.*

Exercice 35 • *Déterminer les régions du plan* (x, y) *où les équations*

$$xu_{xx} - u_{xy} + yu_{yy} = 0$$

$$-x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1+y)\, u_{yy} = 0$$

soient 1- elliptique. 2-hyperbolique. 3- parabolique.

Définition 36 *La transformation* $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ *est une transformation régulière sur* Ω *si*

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Lemme 37 *Le type de l'EDP du second ordre est invariant par les transformations régulières* .

Preuve. Soient l'EDP du second ordre suivante:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = g \tag{4}$$

on pose $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ une transformation régulière, et $u(\xi, \eta) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Nous montrons que u est une solution d'une équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre de même type que (4) . En utilisant la règle du chaine on obtient:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \left(\eta_y \xi_x + \eta_x \xi_y\right) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}$$

En substituant ces formules dans (4), on trouve que u satisfait l'équation linéaire suivante:

$$L[u] = Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

où les coefficients des dérivées partielles du second ordre sont données par

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_Y\xi_x + c\xi_y^2, \\ B &= a\eta_x\xi_x + b\left(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y\right) + c\eta_y\xi_y, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

Notons que nous n'avons pas bosoin de calculer les coefficients des dérivées d'ordre inferieur car le type de l'EDP est déterminé uniquement par sa partie principale. Un calcul élémentaire montre que ces coefficients satisfont l'équation matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}.$$

Donc $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 = J_T^2\left(ac - b^2\right) = -J_T^2 \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Par conséquent le type de l'équation est invariant par les transformations régulières. ■

Définition 38 **1** *La forme canonique d'une équation hyperbolique est*

$$L[u] = u_{\xi\eta} + l_1[u] = G(\xi, \eta).$$

où l_1 est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1.

2 *La forme canonique d'une équation parabolique est*

$$L[u] = u_{\xi\xi} + l_1[u] = G(\xi, \eta).$$

3 *La forme canonique d'une équation elliptique est*

$$L[u] = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + l_1[u] = G(\xi, \eta).$$

Remarque 39 *Notons que la partie principale de la forme canonique d'une équation hyperbolique n'est pas égal à l'opérateur d'onde. On peut montrer que l'opérateur d'onde peut transformer à la forme* $u_{\xi\eta} = 0$.

3.2 La forme canonique des éqution hyperboliques

Théorème 40 *On suppose que l'équation (4) est de type hyperbolique dans* Ω *. Alors il existe un système des coordonnées* (ξ, η) *dans lequel l'équation de la forme canonique*

$$u_{\xi\eta} + l_1\left[u\right] = G\left(\xi, \eta\right) \tag{hyper}$$

où $u\left(\xi, \eta\right) = u\left(\xi\left(x, y\right), \eta\left(x, y\right)\right), l_1$ *est un opérateur différentiel d'ordre 1 et* G *est une fonction qui dépend de (4).*

Remarque 41 *La relation (hyper) est appelée la* 1^{ere} *forme canonique ou standart pour les EDP(s) hyperboliques.*

Preuve. Sans perte de généraluté, on peut supposer que $a(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in \Omega$. On défini les deux fonctions $\xi = \xi\left(x, y\right), \eta = \eta\left(x, y\right)$ tq

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned} \tag{5}$$

On résoud une seul équation car les deux équations sont égales. On écrit l'équation (5) sous la forme

$$\frac{1}{a}\left(a\xi_x + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y\right)\left(a\xi_x + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y\right) = 0$$

Donc on résoud le système suivant

$$\begin{cases} a\xi_x + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.a) \\ a\xi_x + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.b) \end{cases} \tag{6}$$

on choisi les fonctions $\xi = \xi\left(x, y\right), \eta = \eta\left(x, y\right)$ tq (6) soient satisfait.

Les équations caractéristique de $(6.a)$ sont

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b + \sqrt{b^2 - ac},$$

Par conséquent ξ est constante sur chaque caractéristique (càd $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0$). Les caractéristiques sont solutions de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}. \tag{7}$$

De la même façon, on trouve que η est constante sur la caractéristique déterminée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \tag{8}$$

.

d'où, on obtient deux équations différentielle ordinaires qui déterminent ξ et η ■

Définition 42 *Les solutions de (7) et (8) sont appelées les caractéristiques (ou les projections caractéristiques) de l'équation* $L[u] = G$.

Remarque 43 •

- *Une intégration de* (7) *et* (8) *donne deux familles de courbes* $\xi = \xi(x, y) = c_1$ *et* $\eta(x, y) = c_2$ *dites :Courbes Caractéristiques de l'EDP* (4)
- *Si on pose* $X = \xi + \eta$ *et* $Y = \xi - \eta$ *, on peut mettre l'équation* $(*)$ *sous la seconde forme canonique*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + l_1[u] = G(X, Y).$$

Exemple 44 *Soit l'équation suivante:*

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0 \tag{hyper Ex}$$

On a $b^2 - ac = 1 > 0$ *l'équation est hyperbolique. Les caractéristiques sont*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-\sin x + \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}}{1} = -\sin x + 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-\sin x - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}}{1} = -\sin x - 1
\end{aligned}$$

Donc les solutions sont

$$\begin{aligned}
y &= \cos x + x + c_1 \\
y &= \cos x - x + c_2
\end{aligned}$$

les nouvelles variables sont $\xi(x,y), \eta(x,y)$ *sont données par*

$$\begin{aligned}
\xi(x,y) &= \cos x + x - y \Rightarrow \xi_x = -\sin x + 1,\ \xi_y = -1,\ \xi_{xx} = -\cos x \text{ et } \xi_{yy} = 0 \\
\eta(x,y) &= \cos x - x - y \Rightarrow \eta_x = -\sin x - 1\ ,\eta_y = -1,\ \eta_{xx} = -\cos x \ \text{ et } \eta_{yy} = 0
\end{aligned}$$

Donc les dérivées partielles de la fonction $u(\xi,\eta) = u(\xi(x,y), \eta(x,y))$ *sont données par*

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi (1 - \sin x) - u_\eta (1 + \sin x)\,. \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -(u_\xi + u_\eta). \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + u_\xi\xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta\eta_{xx} = u_{\xi\xi}(1 - \sin x)^2 \\
&\quad -2u_{\xi\eta}\left(1 - \sin^2 x\right) - u_\xi \cos x + u_{\eta\eta}(\sin x + 1)^2 - u_\eta \cos x \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = u_{\xi\xi}(\sin x - 1) + \\
&\quad u_{\xi\eta}\left[(\sin x - 1) + (\sin + 1)\right] + u_{\eta\eta}(1 + \sin x) + u_\xi \times 0 + u_\eta \times 0 \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + u_\xi\xi_{yy} + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta\eta_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_\xi \times 0 + u_{\eta\eta} + u_\eta \times 0
\end{aligned}$$

En sibstituant ces équations dans l'équation (hyper Ex), on obtient:

$$-4u_{\xi\eta} = 0$$

La solution de cette équation est

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Donc la solution de l'équation $(hyper\ Ex)$ *est*

$$u(x,y) = F(\cos x + x - y) + G(\cos x - x - y).$$

3.3 La forme canonique des éqution paraboliques

Théorème 45 *On suppose que l'équation (4) est de type parabolique dans* Ω *. Alors il existe un système des coordonnées* (ξ,η) *dans lequel l'équation de la forme canonique*

$$u_{\xi\xi} + l_1[u] = G(\xi,\eta) \tag{para}$$

où $u(\xi,\eta) = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), l_1$ *est un opérateur différentiel d'ordre 1 et* G *est une fonction qui dépend de (4).*

Preuve. Lorsque $b^2 - ac = 0$, on peut supposer que $a(x,y) \neq 0\ \forall (x,y) \in \Omega$. On défini deux fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ tq $B(\xi,\eta) = C(\xi,\eta) = 0\ \forall (x,y) \in \Omega$. Il suffit de prendre $C = 0$, puisque la parabolicité de l'équation implique que $B = 0$. Par conséquent, nous devons trouver une fonction η solution de l'équation

$$C(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = \frac{1}{a}\left(a\eta_x + b\eta_y\right)^2 = 0.$$

Donc, η est une solution de l'équation du 1^{er} ordre

$$a\eta_x + b\eta_y = 0$$

lorsque η est constante sur la courbe caractéristique où la courbe caractéristique est une solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

■

Remarque 46 • *Pour la varible ξ on peut choisir toute fonction de (x, y) vérifie la condition $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$.*

- *Notons que l'équation parabolique admet une seule famille des caractéristique.*

Exemple 47 *Démontrer que l'équation*

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \qquad \text{(para Ex)}$$

est parabolique, puis déterminer la solution générale pour $x > 0$.

Preuve. On a $a = x^2, b = -xy$ et $c = y^2 \Rightarrow b^2 - ac = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$. Donc l'équation est parabolique.

Les courbes caractéristiques de cette équation sont les solution de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \frac{-xy}{x^2} = -\frac{y}{x} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = -\ln x + c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(xy) = c_1 \Leftrightarrow xy = e^{c_1} = c_2\end{aligned}$$

Donc la fonction $\eta(x, y) = xy$. Pour simplifier on prend $\xi(x, y) = x$ ou $\xi(x, y) = y$.

L'équation $(para)$ sera

$$\begin{aligned}x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y &= x^2\left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}y + u_{\eta\eta}y^2\right) \\ &\quad -2xy\left(u_{\xi\eta}x + u_{\eta\eta}xy + u_\eta\right) + y^2\left(u_{\eta\eta}x^2\right) + x\left(u_\xi + u_\eta y\right) + y\left(u_\eta x\right) \\ &= x^2u_{\xi\xi} + xu_\xi = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\xi} + \frac{1}{x}u_\xi = u_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}u_\xi = 0\end{aligned}$$

on pose $v = u_\xi$, la dernière équation devienne

$$\begin{aligned} v_\xi + \frac{1}{\xi} v &= 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{d\xi}{\xi} \\ &\Leftrightarrow \ln v = -\ln \xi + f(\eta) = \ln \frac{1}{\xi} + f(\eta) \\ &\Leftrightarrow v = \frac{h(\eta)}{\xi} \Leftrightarrow \frac{du}{d\xi} = \frac{h(\eta)}{\xi} \\ &\Leftrightarrow u(\xi, \eta) = h(\eta) \ln \xi + k(\eta) \\ &\Leftrightarrow u(x, y) = h(xy) \ln x + k(xy) \end{aligned}$$

avec h *et* k sont des fonctions arbitraires de classe $C^2(\mathbb{R})$. ■

3.4 La forme canonique des équations elliptique

Avant de présenter le résultat qui concerne la forme canonique d'une équation elliptique, on a besoin de la définition d'une fonction analytique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 48 *Soit f une fonction définie sur Ω . On dit que f est une fonction analytique sur Ω si $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$ la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k-j} (x - x_0)^j (y - y_0)^{k-j}$$

est convergente vers $f(x, y)$.

Ici on défini le changement de variable tel que les nouveaux coefficients vérifient $A = C$ et $B = 0$. On a le théorème suivant:

Théorème 49 *Si l'équation est elliptique dans Ω et les coefficients a, b et c sont des fonctions analytiques réelles dans Ω. Alors il existe un système de coordonnées (ξ, η) dans lequel l'équation a la forme canonique*

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + l_1[u] = G(\xi, \eta). \tag{ellip}$$

où l_1 est un opérateur différentiel d'ordre 1 et G est une fonction qui dépend de (4).

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a(x,y) \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega$. On détermine deux fonctions $(\xi, \eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$ tq

$$\left\{ \begin{array}{c} A(\xi,\eta) = a\xi_x^2 + 2b\zeta_x\xi_y + c\xi_y^2 = C(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 .... (9.1) \\ B(\xi,\eta) = a\eta_x\xi_x + b\left(\eta_y\xi_x + \eta_x\xi_y\right) + c\eta_y\xi_y = 0 .... (9.2) \end{array} \right. \tag{9}$$

Il s'agit d'un système de deux équations différentielles non linéaire du premier ordre. La principale difficulté dans le cas elliptique est que (9.1) et (9.2) sont couplées. Pour découpler ces équations, on utilise le plan complexe et l'hypothèse d'analycité. On peut écrire le système (9) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} A(\xi,\eta) - C(\xi,\eta) = a\left(\xi_x^2 - \eta_x^2\right) + 2b\left(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y\right) + c\left(\xi_y^2 - \eta_y^2\right) = 0 \\ iB(\xi,\eta) = ai\eta_x\xi_x + b\left(i\eta_y\xi_x + i\eta_x\xi_y\right) + ci\eta_y\xi_y = 0. \end{array} \right.$$

On défini la fonction complexe $\phi = \xi + i\eta$, le système (9) est équivalent à

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0 \tag{10}$$

Nous somme arrivés à la même équation dans le cas hyperbolique, mais dans ce cas l'équation n'admet aucune solution réelle, ou d'autre terme les équations elliptiques n'ont pas des caractéristiques réelles. Comme ds le cas hyperbolique, on peut factoriser l'équation non linéaire (10) en deux équations linéaires, mais dans ce cas ce sont de valeurs complexe.

Donc on a besoin de résoudre des équations suivantes

$$a\phi_x + \left(b \pm i\sqrt{ac - b^2}\right)\phi_y = 0. \tag{11}$$

Comme précédement, les solutions ϕ et ψ sont constantes sur les caractéristiques (qui sont définies sur le plan complexe.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}.$$

Comme dans le cas hyperbolique, la nouvelle équation a la forme canonique

$$u_{\phi\psi} + ... = 0$$

ce n'est pas encore la forme canonique d'une équation elliptique à coefficients réelles. Nous retournons à notre variables réelles ξ et η à l'aide de la transformation linéaire

$$\xi = \operatorname{Re}\phi \text{ et } \eta = \operatorname{Im}\phi.$$

Lorsque ξ et η sont solutions de système (9), il s'ensuit que dans des variables ξ et η l'équation a la forme canonique.

Remarque 50 *L'existence et l'unicité de la solution de l'équation* (11)*se découlent de l'analycité des coefficients des équations du premiers ordres.*

■

Exemple 51 *On considère l'équation de Tricomi*

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0 \textit{ avec } x > 0.$$

Détermination de la transformation ξ *,* η*. En effet*

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{x}$$

donc les courbes caractéristiques complexes sont

$$\phi = \frac{3}{2}y \pm i\,(x)^{\frac{3}{2}} = c$$

et la transformation est

$$\xi = \operatorname{Re}\phi = \frac{3}{2}y \textit{ et } \eta = \operatorname{Im}\phi = (x)^{\frac{3}{2}}$$

On calcul les dérivées partielles de ξ et η

$$\xi_x = \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = \eta_y = \eta_{yy} = \eta_{yx} = 0, \xi_y = \frac{3}{2}, \eta_x = \frac{3}{2}(x)^{\frac{1}{2}}, \eta_{xx} = \frac{3}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$$

en substituant dans l'équation de Tricomi, on obtient

$$u_{xx} + xu_{yy} = \frac{9}{4}xu_{\xi\xi} + \frac{9}{4}xu_{\eta\eta} + \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}}u_\eta = 0$$

on dévise sur x on trouve

$$\frac{9}{4}\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta\right) = 0.$$

IV. La méthode de séparation des variables et les séries de Fourier

La méthode de séparation des variables est utilisée pour déterminer une solution analytique d'une EDP linéaire homogène sous forme d'une serie d'un pb de Cauchy où pb aux limites. Le principe de cette méthode est: chercher des solutions spéciales ont la forme

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{1}$$

où $X(.)$ (resp $Y(.)$) une fonction qui dépend seulement de x (resp de$y$). En général, ces solutions doivent satisfaire certaines conditions supplémentaires. Dans de nombreux cas ces conditions supplémentaires ne sont que des conditions aux limites homogènes. Il se trouve que X et Y doivent être des solutions des équations différentielles ordinaires qui sont facilement déterminer par les données de l' EDP.

4.1 Résolution de l'équation de la chaleur par la méthode de séparation des variables

On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \quad 0 < x < L, \quad t > 0........(2.1) \\ u\,(0,t) = u\,(L,t) = 0 \quad t \geq 0.............(2.2) \\ u\,(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L..............(2.3) \end{cases} \tag{2}$$

où k est une constante positive et f la condition initiale vérifie la condition de compatibilité

$$f(0) = f(L) = 0$$

Nous commençons par la recherche des solutions de l'EDP (2) qui satisfont les conditions aux limites (2.2) et ont la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3}$$

où X et T sont des fonctions de x et t respectivement .

On dérive la solution séparée (3) une fois par rapport à t et deux fois par rapport à x, en sibstituant dans l'équation (2.1), on obtient

$$XT_t = kX_{xx}T \Leftrightarrow \frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X}$$

Comme les deux variables sont indépendantes, il implique qu'il existe une constante notée λ (qui s'appelle la constante de séparation) tq

$$\frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda \tag{4}$$

L'équation (4) est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X, \quad 0 < x < L........ (5) \\ \frac{dT}{dt} = -\lambda kT, \quad t > 0................ (6) \end{cases}$$

La solution u satisfait les conditions aux limites (2.2) ssi

$$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \text{ et } u(L,t) = X(L)\,T(t) = 0$$

Comme $u \neq 0$, on trouve $X(0) = X(L) = 0$. Donc le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L........... (7) \\ \qquad X(0) = X(L) = 0............. (8) \end{cases}$$

Une solution non triviale de ce système est appelée fonction propre du pb avec une valeur propre λ. Le pb $(7-8)$ est appelé un pb de valeurs propres. Il s'agit d'un pb EDO aux limites, on ne sait pas a priori qu'il existe une solution pour toute valeur λ. D'autre part, si nous pouvons écrire la solution générale de l'équation différentielles pour chaque λ, alors nous avons besoin seulement de vérifier pour quelle λ il existe une solution qui à également satisfait aux conditions aux limites . Heureusement (7) s'agit une EDO linéaire de second ordre avec des coefficients constants, et sa solution générale (qui dépend de λ) est de la forme suivante:

1. Si $\lambda < 0$ la solution est de la forme $X(x) = \alpha ch\sqrt{-\lambda}x + \beta sh\sqrt{-\lambda}x$ avec $ch\,(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh\,(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
2. Si $\lambda > 0$ la solution est de la forme $X(x) = \alpha\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$. où α et β sont des nombres réeles.

Remarque 52 *Si $\lambda = 0$ la solution est de la forme $X(x) = \alpha + \beta x$. Donc le pb n'admet pas des valeurs propres nulles car la solution ne s'annulle pas en deux points.*

Discussion

1. Si $\lambda < 0$ la solution est $X(x) = \alpha ch\sqrt{-\lambda}x + \beta sh\sqrt{-\lambda}x$. La fonction $sh\,(x)$ admet une seule racine au point $x = 0$, tandisque la fonction $ch\,(x)$ est strictement positive. Comme $X(x)$ doit être satisfait $X(0) = 0$, il implique que $\alpha = 0$. La 2^{eme} conditions aux bords $X(L) = 0$ implique que $\beta = 0$.Donc dans ce cas $X(x) = 0$, par conséquent le pb $(7-8)$ n'admet pas des valeurs propres négatives.
2. Si $\lambda > 0$. Dans ce cas la solution est de la forme $X(x) = \alpha\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, d'aprés les conditions aux bords, on trouve

$$\begin{cases} X\,(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ X(L) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Donc $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ et la solution $X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de pb $(7-8)$ est la suite infinie des fonctions propres

$$X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{9}$$

Traitons maintenant l'EDO (6). La solution générale est de la forme

$$T\,(t) = \beta e^{-k\lambda t} \tag{10}$$

on sibstituant λ_n dans (10),on obtient

$$T_n\,(t) = \beta e^{-k\lambda_n t} = \beta e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{11}$$

Remarque 53 *De point de vue physique, il est clair que la solution de* (6) *doit être décroissante en temps. Par conséquent nous devons avoir* $\lambda > 0$.

Donc la suite des solutions est donnée par

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \tag{12}$$

D'aprés le principe de superposition on trouve que toute combinaison linéaire de $u_n(x,t)$ est une solution de l'équation de la chaleur sous les conditions de Dirichlet càd

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

On considère maintenant la condition initiale. Si la condition initiale est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

càd une combinaison linéaire des fonctions propres. Donc la solution du pb de la chaleur est donné par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

Par conséquent nous somme capable de résoudre le pb pour une certaine famille de conditions initiales.

4.2 Les séries de Fourier

Maintenant la question qui se pose, si on prend

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

est ce que u est une solution du pb? Pour répondre à cette question, on a besoin de la définition des séries de Fourier et ces propriétés.

Définition 54 *On dit que f est une fonction périodique de période L ssi*

$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x, x+L \in D_f$$

Exemple 55 *Les fonction* $\sin x$ *et* $\cos x$ *sont des fonctions pérodiques de période 2π.*

Définition 56 *Soit f une fonction définie sur $[-L, L]$ et en dehors de cet intervalle est définie par $f(x+2L) = f(x)$ (càd f est une fonction périodique de période $2L$). La série de Fourier associée à la fonction f est définie par*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{13}$$

où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés par

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, & n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, & n \geq 1 \end{cases} \tag{14}$$

Remarque 57

- *On peut déterminer les coefficients a_n et b_n par les relations suivantes*

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int\limits_{c}^{c+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, & n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{L} \int\limits_{c}^{c+2L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, & n \geq 1 \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R} \tag{15}$$

- *La série* (13) *est une série associée à f, on sait pas que cette série est converge vers f ou non .*

Exemple 58 *Déterminer les coefficients de la série de Fourier associée à la fonction suivante:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad 2 \leq x < 4 \\ 0 & si \quad 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

on a f est périodique de période 6 de plus f est discontinue et les pts de discontnuités sont $x = \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, ...$ les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3}\int_2^4 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_2^4 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_2^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\sin(n\pi)$$

Remarque 59 *Si f est une fonction paire, donc la série de Fourier associée à f est*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Si f est impaire , donc la série de Fourier associée à f est

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Le pb de convergence est traité par Dirichlet qui a développé des conditions de convergence des séries de Fourier.

4.2.1 Conditions suffisante de Dirichlet.

Théorème 60 *Soit f une fonction périodique de période $2L$ définie sur $[-L, L]$. Supposons que f et $f\prime$sont des fonctions continues par morceaux sur $[-L, L]$. Alors la série de Fourier (13) converge vers*

1. *$f(x)$ si x est un pt de contnuité.*
2. *$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x est un pt de discontnuité.*

Remarque 61 *1. D'aprés le résultat précédent, on peut écrire*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \tag{15}$$

pour tout points de continuité, et

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \tag{16}$$

pour tout points de discontinuité.

2. Les conditions du théorème sont suffisantes mais ne sont pas nécéssaires.

4.2.2 Identité de Parseval. Si f est une fonction périodique de période $2L$ et vérifie les conditions de Dirichlet, alors on a

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} (f(x))^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \tag{17}$$

avec a_0, a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f.

4.2.3 Convergence uniforme.

Théorème 62 *Soit la série des fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$. *Si* u_n *est continue sur* $[a,b]$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ *est uniformément converge vers* f, *alors* f *est continue sur* $[a,b]$ *de plus on a*

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} u_n(x) \, dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x) \, dx. \tag{18}$$

Si u_n *est dérivable* $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx} u_n(x)$ *est uniformément converge, alors*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx} u_n(x). \tag{19}$$

Théorème 63 *(Théorème de Weierstrass) S'il existe* $M_n \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}$ *tq*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n(x)| \leq M_n$$

et $\sum\limits_{n\geq 0} M_n$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ *est uniformément converge.*

4.2.4 Les séries de Fourier complexes. La série de Fourier complexe associé à la fonction périodique f de période $2L$ est définie par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \tag{20}$$

avec

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx \tag{21}$$

Remarque 64 *Dans la relation* (20)*, on a supposé que* f *satisfait les conditions de Dirichlet. De plus si* f *est continue au pt* x *on trouve*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

si non,on aura

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}.$$

4.2.5 Les séries de Fourier doubles. L'idée de développement en série de Fourier d'une fonction d'une seule variable peut être s'étendre au cas des fonctions à deux variables x et y c.à.d $f(x,y)$. Par exemple nous pouvons développer $f(x,y)$ en série sinus de Fourier double

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L_2}\right)$$

avec

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L_2}\right) dxdy$$

Remarque 65

1. *Résultat similaire peut être obtenu pour la série cosinus ou série ayant deux termes sinus et cosinus.*
2. *Ces idées peuvent être généralisée aux séries de Fourier triple etc.*

V. Transformées de Fourier et de Laplace

Dans ce chapitre, nous introduisons une autre classe des méthodes qui peuvent être utilisés pour résoudre les EDPs. Ces méthodes sont appelées méthodes de transformation intégrale. Les méthodes fondamentalles sont les transformées de Fourier et de Laplace.

5.1 La transformée de Fourier

Soit u une fonction continue par morceaux tq

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx < \infty$$

càd u est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Définition 66 *La transformée de Fourier de la fonction u est définie par*

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx. \tag{1}$$

Remarque 67 *On peut trouver deux classes des fonctions qui vérifient* (1) *.*

- *Classe des fonctions continues par morceaux à support compact càd $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tq $u(x) = 0\ \forall |x| \geq k$.*
- *Classe des fonctions C^∞ à décroissance rapide (càd l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$)*

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in C^\infty, \exists M = M(u) \in \mathbb{R} / \left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| \leq \frac{M}{x^n} \text{ pour } x \to \infty, \text{avec } k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exemple 68 *Déterminer la transformée de Fourier de la fonction*

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} & si\ \ |x| < a \\ 0 \ \ si & |x| > a \end{cases}$$

D'aprés de la définition de $\mathcal{F}$ on trouve

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-a}^{a} 1 - \frac{|x|}{a} e^{-ix\xi} dx$$

par intégration par partie on trouve

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \frac{4}{a\xi^2}\sin^2\left(\frac{\xi a}{2}\right)$$

Remarque 69 *La transformée de Fourier est une argument de régularisation, car elle envoie des fonctions discontinues à des fonctions continues.*

Exemple 70 *Démontrer que la transformée de Fourier de la fonction*

$$u(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad |x| \leq a \\ 0 \quad si \quad |x| > a \end{cases} \quad avec \quad a > 0$$

est donnée par

$$\widehat{u}(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\xi}\sin(a\xi) \quad si \quad \xi \neq 0 \\ 2a \quad si \quad \xi = 0 \end{cases}$$

5.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier.

Théorème 71 *(Reiman Lebesgue) Soit u une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *. Alors*

- $\widehat{u}$ *est une fonction bornée sur* $\mathbb{R}$ *càd*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad |\widehat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx < \infty.$$

- *La transformée de Fourier est une application linéaire càd*

$$\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v).$$

- $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \widehat{u}(\xi) = 0.$

Théorème 72 *(Différentiation) Soit u une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *tq* $x^k u$ *est aussi intégrable sur* $\mathbb{R}$ $\forall k$ *tq* $0 \leq k \leq n$*. Alors*

$$(\mathcal{F}(u))^{(k)}(\xi) = (-i)^k \int_{\mathbb{R}} x^k u(x) e^{-ix\xi} dx = \mathcal{F}\left((-i)^k x^k u\right)(\xi).$$

Si $u \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $u^{(k)}$ sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}\left(u^{(k)}\right)(\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}(u)(\xi) \quad \forall k \ tq \ \ 0 \leq k \leq n.$$

Remarque 73 *Dans le cas où $u = u(x,t)$, la transformée de Fourier de u est définie par*

$$\mathcal{F}(u)(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-ix\xi}dx.$$

- *La transformée de Fourier de u_t est donnée par:*

$$\mathcal{F}(u_t)(\xi,t) = \widehat{u}_t(\xi,t).$$

- *La transformée de Fourier d'une EDP est une EDO par rapport la variable temporelle t , par sa résolution on obtient la fonction transformée $\widehat{u}$ qui peut convertir à la fonction d'origine u par la transformée inverse.*

Théorème 74 *(L'inverse de la transformée de Fourier) Soient u et $\widehat{u}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi)e^{i\ \xi x}d\xi.$$

Définition 75 *(Produit de Convolution) Le produit de convolution de deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ est donné par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)dy. \qquad (*)$$

Remarque 76 *L'intégrale (*) existe si u est bornée et v intégrable ou l'inverse, ou encore si u et v sont intégrables.*

- *Les propriétés du produit de convolution*

1 $u * v = v * u.$

2 $u * (v * w) = u * (v * w).$

3 $u*(\alpha v+\beta w)=\alpha\,(u*v)+\beta\,(u*w)\,.$

4 $(u*v)'=u'*v.$

5 $\mathcal{F}\,(u*v)=\mathcal{F}\,(u)\,\mathcal{F}\,(v)\,.$

6 *La formule de Parseval*

$$\int_{\mathbb{R}}|u(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi$$

Remarque 77 *Dans ce tableau suivant la transformée de Fourier de quelques fonctions*

La fonction u	*Sa transformée de Fourier*
$\begin{cases}1 & si\quad |x|<a\\ 0 & si\quad |x|>a\end{cases}$	$2\sin\left(\frac{\xi a}{\xi}\right)\quad si\ \xi\neq 0$
$\begin{cases}1-\frac{|x|}{a} & si\quad |x|<a\\ 0 & si\quad |x|>a\end{cases}$	$4\frac{\sin^2\left(\frac{a\ \xi}{2}\right)}{a\xi^2}\quad si\ \xi\neq 0$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-|a|\xi}$
$e^{-ax^2},\quad a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$
$\frac{\sin(ax)}{x},\quad a>0$	$\begin{cases}\pi & si\quad |\xi|<a\\ \frac{\pi}{2} & si\quad |\xi|=a\\ 0 & si\quad |\xi|>a\end{cases}$

Exercice 78 *Démontrer que la transformée de Fourier de la fonction $u\,(x)=e^{-|x|}$ est donnée par $\widehat{u}\,(\xi)=\frac{2}{1+\xi^2}$.*

- Déduire la fonction v où $\widehat{v}\,(\xi)=\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2}$.

5.2 Application de la transformée de Fourier

Maintenant, on utilise la transfomée de Fourier pour déterminer la solution de quelques pbs

5.2.1 L'équation de la chaleur. Soit le pb de diffusion suivant

$$\begin{cases}u_t-ku_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=\varphi\,(x) & avec\ \ \varphi\in\mathcal{S}\end{cases}\tag{pb1}$$

On applique la T.F à l'équation on trouve

$$\widehat{u}_t(\xi,t)+k\xi^2\widehat{u}(\xi,t)=0$$

La solution de cette équation est

$$\widehat{u}(\xi,t)=Ce^{-k\xi^2 t}$$

D'aprés la solution initiale

$$\widehat{u}(\xi,0)=C=\widehat{\varphi}(\xi)$$

donc la solution est

$$\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-k\xi^2 t}$$

on a

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\left(\frac{\xi^2}{4a}\right)}$$

donc si $kt=\frac{1}{4a}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4kt}$ càd

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)=\sqrt{4\pi kt}e^{-k\xi^2 t}\Leftrightarrow\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)=e^{-k\xi^2 t}$$

d'autre part, on utilise le résultat qui concerne le produit de convolution on trouve

$$\widehat{u}(\xi,t)=\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)=\mathcal{F}\left(\varphi*\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)$$

donc la solution est

$$u(x,t)=\left(\varphi*\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right)(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)\,dy \qquad (**)$$

Remarque 79 *Lorsqu'on utilise la transformée de Fourier, on obtient la solution du* $(pb1)$ *sous la condition* $\varphi\in\mathcal{S}$*. Cependant une fois la solution découle, nous pouvons essayer de montrer qu'elle existe même sous des conditions faibles. Par exemple si la fonction* φ *est continue et bornée* $(**)$ *est une solution du* $(pb1)$.

5.2.2 L'équation des ondes. Soit le pb de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{pb2}$$

On applique la T.F à ce pb on trouve

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} + \xi^2 c^2 \widehat{u} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \widehat{u}_t(\xi,0) = \widehat{\psi}(\xi) \end{cases} \tag{pb2t}$$

La solution de ce pb est

$$\begin{cases} \widehat{u}(\xi,t) = \alpha \cos(c\xi t) + \beta \sin(c\xi t) \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \widehat{u}_t(\xi,0) = \widehat{\psi}(\xi) \end{cases}$$

On a $\widehat{u}(\xi,0) = \alpha = \widehat{\varphi}(\xi)$ et $\widehat{u}_t(\xi,t) = -\alpha c\xi \sin(c\xi t) + \beta c\xi \cos(c\xi t) \Leftrightarrow \widehat{u}_t(\xi,0) = \beta c\xi = \widehat{\psi}(\xi) \Leftrightarrow \beta = \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{c\xi}$.

Donc la solution du $(pb2t)$ est

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\varphi}(\xi)\cos(c\xi t) + \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{c\xi}\sin(c\xi t)$$

On utilise la transformée inverse on obtient

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(\xi,t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi,t)\, e^{i\ \xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{\varphi}(\xi)\cos(c\xi t) + \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{c\xi}\sin(c\xi t)\right] e^{i\ \xi x} d\xi \end{aligned}$$

D'aprés la présentation exponentielle de sin et cos on trouve

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\frac{e^{i\ \xi ct} + e^{-i\ \xi ct}}{2} e^{i\ \xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{c\xi}\frac{e^{i\ \xi ct} - e^{-i\ \xi ct}}{2i} e^{i\ \xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\left(e^{i\ \xi(x+ct)} + e^{i\ \xi(x-ct)}\right) d\xi + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{ci\xi}\left(e^{i\ \xi(x+ct)} - e^{i\ \xi(x-ct)}\right) d\xi \end{aligned}$$

On a $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}\left(\xi\right)\left(e^{i\ \xi(x+ct)}+e^{i\ \xi(x-ct)}\right)d\xi=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(c+ct\right)+\varphi\left(c-ct\right)\right].$

D'autre part $\frac{1}{c\ i\ \xi}\left(e^{i\ \xi(x+ct)}-e^{i\ \xi(x-ct)}\right)=\int\limits_{(x-ct)}^{(x+ct)}e^{i\ \xi\ y}dy$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi c}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\xi\right)\left(\frac{e^{i\ \xi(x+ct)}-e^{i\ \xi(x-ct)}}{i\ \xi}\right)d\xi &= \frac{1}{2c}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}\widehat{\psi}\left(\xi\right)\int\limits_{(x-ct)}^{(x+ct)}e^{i\ \xi\ y}dyd\xi \\
&= \frac{1}{2c}\int\limits_{(x-ct)}^{(x+ct)}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\xi\right)e^{i\ \xi\ y}d\xi dy \\
&= \frac{1}{2c}\int\limits_{(x-ct)}^{(x+ct)}\psi\left(y\right)dy
\end{aligned}$$

donc la solution du $(pb2)$ est

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(c+ct\right)+\varphi\left(c-ct\right)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{(x-ct)}^{(x+ct)}\psi\left(y\right)dy.$$

5.2.3 L'équation de Laplace. Soit le pb suivant

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u\left(x,0\right)=f(x) \\ u\left(x,y\right)\ \text{est bornée et}\ \rightarrow 0\ \text{quand}\ y\rightarrow\infty \end{cases}$$

Nous allons chercher une solution en utilisant la transformée de Fourier par rapport à x . Son application à notre pb conduit à l'équation

$$\widehat{u}_{yy}-\xi^2\widehat{u}=0$$

la solution générale de cette équation est donnée par

$$\widehat{u}\left(\xi,y\right)=a\left(\xi\right)e^{\xi y}+b\left(\xi\right)e^{-\xi y}$$

On a $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{u}(\xi,y)=0$, donc on trouve

$$\begin{cases} a(\xi)=0 \ si \ \ \xi<0 \\ b(\xi)=0 \ si \ \ \xi>0 \end{cases}$$

Donc on peut écrire la solution sous la forme

$$\widehat{u}(\xi,y)=c(\xi)\,e^{-|\xi|y}$$

avec a,b et c sont des fonctions arbitraires. D'aprés la condition aux limite

$$\widehat{u}(\xi,0)=\widehat{f}(\xi)$$

on obtient

$$\widehat{u}(\xi,y)=\widehat{f}(\xi)\,e^{-|\xi|y}$$

On applique la transformée inverse pour déterminer $u(x,y)$ (voir le tableau précédent)

$$u(x,y)=\left(\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right)*f=\frac{y}{\pi}\int\frac{f(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}d\tau.$$

Remarque 80 *Dans ce produit de convolution y est juste un paramètre.*

5.3 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une autre transformée intégrale avec des propriétés similaires à la transformée de Fourier. Elle est un outil utile pour résoudre des équations différentielles. La transformée de Laplace utilise habituellement la variable de temps, cependant la transformée de Fourier est appliquée à la variable spatiale sur l'ensemble de la ligne réelle. La transfomée de Laplace est utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires à des coefficients constants, où les équations sont transformées à des équations algébriques, cette idée peut être étendue aux équations aux dérivées partielles où la transformation conduit à la diminution du nombre de variables indépendantes. EDP à deux variables est donc réduite à une équation différentielle ordinaire.

Définition 81 *Soit $u = u(t)$ une fonction , on dit que u est fonction exponentielle d'ordre a quand $t \to \infty$ s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $t_0 \geq 0$*

$$|u(t)| \leq \alpha e^{at} \quad \textit{pour} \quad t \geq t_0.$$

Exemple 82 *Toutes les fonctions bornées sont des fonctions exponentielles d'ordre* 0.

Soit u une fonction continue par morceaux sur $[0, \infty)$ et exponentielle d'ordre a . La ransformée de Laplace est définie par

$$\mathcal{L}(u)(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt \quad \textit{pour} \qquad s > a > 0$$

La fonction $\mathcal{L}(u)(s)$ est appelée la transformée de Laplace de u.

5.3.1 Propriétés de la transformée de Laplace. Dans la suite u et v sont deux fonctions convenables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans le sens où l'on suppose qu'elles satisfont aux conditions suivantes

- Sont continues par morceaux.
- sont des fonctions exponentielles

1 Linéarité de la transformée de Laplace

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\mathcal{L}(\lambda u + \mu v)(s) = \lambda \mathcal{L}(u)(s) + \mu \mathcal{L}(v)(s)$$

2 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{L}\left(e^{\alpha t} u(t)\right)(s) = \mathcal{L}(u)(s - \alpha) \quad \textit{pour } s > \alpha$$

3 Pour $\alpha > 0$ on a

$$\mathcal{L}(u(t - \alpha))(s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}(u)(s)$$

Remarque 83 *La propriété* (3) *ne marche pas pour* $\alpha < 0$.

4 Pour $\alpha > 0$ on a

$$\mathcal{L}\left(u\left(\alpha t\right)\right)(s) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\left(u\right)\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

5 Si $u\left(0^{+}\right) = \lim\limits_{t\to 0^{+}} u(t)$, alors on a

$$\mathcal{L}\left(u'\right)(s) = s\mathcal{L}\left(u\right)(s) - u\left(0^{+}\right)$$

Par récurrence on obtient la formule

$$\mathcal{L}\left(u^{(n)}\right)(s) = s^{n}\mathcal{L}\left(u\right)(s) - s^{n-1}u\left(0^{+}\right) - s^{n-2}u'\left(0^{+}\right) + ... + u^{(n-1)}\left(0^{+}\right)$$

6

$$\mathcal{L}\left(\int_{0}^{t} u\left(x\right)dx\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(u\right)(s)$$

7 Pour $n > 0$ on a

$$\mathcal{L}\left(t^{n}u\left(t\right)\right)(s) = \left(-1\right)^{n}\left(\mathcal{L}\left(u\right)\right)^{(n)}(s)$$

8

$$\mathcal{L}\left(\frac{u\left(t\right)}{t}\right)(s) = \int_{s}^{+\infty}\mathcal{L}\left(u\right)(x)\,dx$$

9 $\lim\limits_{s\to\infty}\mathcal{L}\left(u\right)(s) = 0$

Remarque 84

1 *L'application de la transformée de Laplace à l'EDO à coefficients constants, on obtient une équation algèbrique l'inconue est la fonction* $\mathcal{L}\left(u\right)(s)$. *Aprés résoudre cette équation, on peut définir la fonction* $u(t)$.

2 *On peut exploiter la même idée pour résoudre une EDP pour des fonctions à deux variables.*

Soit $u(x,t)$ une fonction, la transformée se fera par rapport à la variable temporelle$t \geq 0$. La variable spatiale sera traité comme un paramètre. En particulier, nous définissons la transformée de Laplace d'une fonction $u(x,t)$ par

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(x,s\right)=\int\limits_{0}^{\infty}u(x,t)e^{-st}dt$$

De plus

$$\mathcal{L}\left(u_t\right)\left(x,s\right)=s\mathcal{L}\left(u\right)\left(x,s\right)-u(x,0)$$

La dérivée spatiale reste inchangée càd

$$\mathcal{L}\left(u_x\right)\left(x,s\right)=\mathcal{L}\left(u\right)_x\left(x,s\right).$$

5.4 L'application de la transformée de Laplace

5.4.1 L'équation de diffusion. Soit u désigne la constration d'un polluant chomique dissous dans un liquide sur un demi-plan $x>0$. Supposons que au temps $t=0$ la constration est 0. Sur la limite $x=0$ la constration du poluant est constante $(=1)$ pour $t>0$. Le comportement du système est décrit par le modèle mathématique suivant

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, \quad x>0, t>0 \\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=1 \\ u(x,t)\ \textit{est bornée} \end{cases}$$

On applique La transformée de Laplace par rapport à t , on obtient

$$\mathcal{L}\left(u\right)_{xx}\left(x,s\right)-s\mathcal{L}\left(u\right)\left(x,s\right)-u(x,0)=\mathcal{L}\left(u\right)_{xx}\left(x,s\right)-s\mathcal{L}\left(u\right)\left(x,s\right)=0$$

C'est une EDO par rapport à x et s est un paramètre positif. La solution générale de cette équation est

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(x,s\right)=a(s)e^{-\sqrt{s}x}+b\left(s\right)e^{\sqrt{s}x}$$

Puisque la solution est bornée donc $b(s)=0$,dans ce cas la solution est

$$\mathcal{L}(u)(x,s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x}$$

d'autre part on a $\mathcal{L}(u)(0,s) = a(s) = \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$, donc

$$\mathcal{L}(u)(x,s) = \frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}.$$

Pour déterminer la solution $u(x,t)$ on utilise un tableau de la transformée de Laplace.

D'aprés le tableau, on trouve

$$u(x,t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-r^2} dr$$

avec la fonction erf est définie par

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y} e^{-r^2} dr$$

Remarque 85 •

- *Dans l'exemple précédent, on a pouvé définir la solution $u(x,t)$ à partir de $\mathcal{L}(u)(x,s)$ par l'utilisation d'un tableau de la transformée de Laplace*
- *Il existe une formule générale de l'inverse de la transformée de Laplace qui est basée sur la théorie des fonctions complexes. Elle admet une théorie déterminé et une formule précise, mais cette formule est rarement utilisé.*
- *Dans certain cas, au lieu de la formule inverse, on peut expoiter une autre outile utile, c'est le théorème de convolution.*

Théorème 86 *Soient u et v sont deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $(0,\infty)$ tq les deux fonctions sont des fonctions exponentielles. On définie*

$$(u * v)(t) = \int_0^{t} u(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau$$

Alors

$$\mathcal{L}\left(u * v\right)(s) = \mathcal{L}\left(u\right)(s) . \mathcal{L}\left(v\right)(s)$$

Exemple 87 *Soit le pb suivant*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \qquad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(0,t) = f(t) \\ u(x,t) \text{ est bornée} \end{cases}$$

On applique la transfotmée de Laplace à l'équation précédente par rapport à t , on obtient

$$\mathcal{L}\left(u\right)_{xx}(x,s) - s\mathcal{L}\left(u\right)(x,s) = 0$$

Puisque la solution est bornée on obtient

$$\mathcal{L}\left(u\right)(x,s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x}$$

D'autre part on a $\mathcal{L}\left(u\right)(0,s) = \mathcal{L}\left(f\right)(s)$, *donc la solution est*

$$\mathcal{L}\left(u\right)(x,s) = \mathcal{L}\left(f\right)(s)\, e^{-\sqrt{s}x} = F(s)e^{-\sqrt{s}x}$$

on utilise le produit de convolution

$$\mathcal{L}\left(u\right)(x,s) = F(s)e^{-\sqrt{s}x} = \mathcal{L}\left(f * g\right)$$

avec $\mathcal{L}\left(g\right) = e^{-\sqrt{s}x}$.*D'aprés let ableau on trouve*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\sqrt{s}x}\right) = \frac{x}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Donc la solution est

$$u\left(x,t\right) = \int \frac{x}{\sqrt{4\pi\left(t-\tau\right)^3}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}f\left(\tau\right)d\tau$$

Exemple 88 *Prenons une corde qui a une extrimité fixé à l'origine et immobile au moment* $t = 0$ *. La corde mise en mouvement par action d'une force* $f(t)$*. Le comportement de la corde est alorsmodélisé par le pb suivant*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t), \quad x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ u(x,t) \text{ est bornée} \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace par rapport à t*, on aura*

$$-c^2 \left(\mathcal{L}(u)\right)_{xx}(x,s) + s^2 \mathcal{L}(u)(x,s) = F(s)$$

On pose $\mathcal{L}(u)(x,s) = U$*, donc l'équation s'écrit comme*

$$U_{xx} - \frac{s^2}{c^2} U = \frac{F(s)}{c^2}$$

C'est une équation différentielle ordinaire par rapport à x *, la solution générale de l'équation homogène est*

$$U_H(x,s) = A(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{c}}} + B(s) e^{\sqrt{\frac{s}{c}}}$$

La solution particulière est

$$U_p = \frac{F(s)}{s^2}$$

On a U *est bornée donc la solution est*

$$U(x,s) = A(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{c}}} + \frac{F(s)}{s^2}$$

d'autre part on a $U(0,s) = 0 \Leftrightarrow A(s) + \frac{F(s)}{s^2} = 0 \Leftrightarrow A(s) = -\frac{F(s)}{s^2}$*. Donc la solution est*

$$U(x,s) = F(s) \left(\frac{1 - e^{-\sqrt{\frac{s}{c}}}}{s^2} \right)$$

On utilise le produit de convolution et le tableau de la transformée de Laplace , on trouve

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(t) * \left(t - (t - \frac{x}{c})H\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \\ &= \int_0^t f(t-\tau)\left(\tau - \left(\tau - \frac{x}{c}\right)H\left(\tau - \frac{x}{c}\right)\right)d\tau \end{aligned}$$

avec H *est la fonction de Haeviside définie par*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & pour\ x > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$