

Université Mostafa BenBoulaïd- Batna 2-
Faculté de M I, Département de Mathématiques
2ème année, module Analyse complexe

Travaux Dirigés 1 (2020/2021)
Limites, continuité et différentiabilité.

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes:

- 1) $\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z^2}{z^4+z+1}$, 2) $\lim_{z \rightarrow 2i} ((\operatorname{Im} z)^2 - \frac{1}{3} \operatorname{Re} z)$, 3) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$, 4) $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z+3i)(z-2)}{z^2-2z+4}$,
5) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^3+i)}{3z^2+2-iz}$, 6) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z^2+6}$, 7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ni^n}{n+1}$, 8) $n \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

Exercice 2. Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, montrer que :

- a) $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$
b) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Exercice 3.

a) Déterminer le domaine de continuité des fonctions suivantes:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1+z^2}, g(x, y) = (x+y)^2 + ixy, h(z) = \frac{1}{\sin z}, k(z) = z^2 + iz + 2.$$

b) Etudier la continuité des fonctions suivantes:

- 1) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+3iz-2}{z+i} & z \neq i \\ 3i & \text{si } z = i \end{cases}$, 2) $h(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & \text{si } z \neq 2i \\ 5i & \text{si } z = 2i \end{cases}$,
3) $f(z) = \begin{cases} \frac{(z-1)(2z+4)}{z^2-z+3i(z-1)} & \text{si } z \neq 1 \\ \frac{3}{5} - \frac{9}{5}i & \text{si } z = 1 \end{cases}$

Exercice 4.

1- Étudier la différentiabilité des fonctions suivantes: $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = z^2$,
 $h(z) = z\bar{z}$, $k(x, y) = x + iy$.

2- Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Calculer la dérivée de f en utilisant la définition puis l'une des règles de dérivation.