Université Mostafa BenBoulaïd- Batna 2-
Faculté de M I, Département de Mathématiques
2ème année, module Analyse complexe

Travaux Dirigés 2 (2020/2021)
Fonctions analytiques, fonctions harmoniques et intégration complexe.

Exercice 1.

1) Séparer la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions suivantes: shz, chz, $f(z) = z^2 - 5iz + 3 - i$.

2) Calculer $\log\left(1 - i\sqrt{3}\right)$, $\log(1 + 2i)$

3) Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points tel que: $\frac{z-2}{z-3} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1) Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques:
$f(z) = x^4y^5 + ixy$, $f(z) = e^x \cos y - 2xy + i\left(e^x \sin y + x^2 - y^2\right)$,
$f(z) = \cos^2(x - y) + i\sin^2(x - y)$, $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = ze^z$, $f(z) = ch2z$, $f(z) = \frac{1}{e^z}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

2) Soit u: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to u(x, y) = e^x\left(x\cos y - \frac{k}{4e}y\sin y\right) \in \mathbb{R}$. Sous quelles conditions la fonction u est-elle harmonique?

3) Soit $u(x, y) = e^{-2xy}\sin\left(x^2 - y^2\right)$, vérifier que u est harmonique, puis déterminer $v = v(x, y)$ pour que $f = u + iv$ soit analytique.

4) Même question que précedente pour la fonction $u(x, y) = 2x(1\text{-}y)$

Exercice 3. Soit f :$\Omega \to \mathbb{C}$, une fonction analytique dans Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que: f est constante$\Leftrightarrow$ $u = \operatorname{Re} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est constante$\Leftrightarrow$ $v = \operatorname{Im} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est constante$\Leftrightarrow$ $|f|$ est constante$\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ est analytique.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{z^2}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Montrer que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en point $(0, 0)$ et qu'elle n'est pas dérivable en $z_0 = 0$.

Exercice 5.

a)Calculer les intégrales suivantes:

1) $\int_\gamma (2z + 1)\,dz$ pour $\gamma : [0,\ 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1+it$, 2) $\int_\gamma (z + 2\overline{z} - 1)\,dz$ pour $\gamma : [0,\ 2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t - 2i$, 3) $\int_\gamma ze^z dz$ pour $\gamma : [0,\ \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2 + i + 3e^{it}$, 4) $\int_\gamma |z|\,\overline{z}dz$ pour $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ avec $\gamma_1(t) = t$, $t \in [-1,\ 1]$ et $\gamma_2(t) = e^{it}$, $t \in [0,\ \pi]$.

b) Soient $\gamma_1(t) = 2 + 2e^{it}$, $t \in [0,\ 2\pi]$ et $\gamma_2(t) = i + e^{-it}$, $t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Représenter γ_1 et γ_2.

2) Calculer les deux intégrales suivantes

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2}, \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z-i)^3}.$$